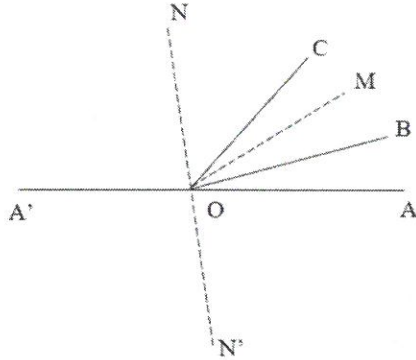




Clasa a VI a



1. În interiorul unghiului $\sphericalangle AOC$ se ia punctul B , astfel încât $\sphericalangle AOC = 50^\circ$, $\sphericalangle AOB = 20^\circ$. Considerăm (OM bisectoarea $\sphericalangle BOC$ și (ON bisectoarea $\sphericalangle A'OC$, unde (OA' este semidreapta opusă lui (OA . Aflați măsura unghiului $\sphericalangle MON'$, unde (ON' este semidreapta opusă lui (ON .

Carmen și Viorel Botea, Brăila

Soluție: $\widehat{MON} = \frac{\widehat{BOC} + \widehat{A'OC}}{2} \Rightarrow \widehat{BOC} = \widehat{AOC} - \widehat{AOB} = 50^\circ - 20^\circ = 30^\circ$, $\widehat{A'OC} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$ --- 15 p
 $\widehat{MON} = \frac{130^\circ + 30^\circ}{2} = 80^\circ \Rightarrow \widehat{MON'} = 180^\circ - \widehat{MON} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$. --- 15 p

2. Aflați toate numerele de forma \overline{abcd} care verifică relația $\overline{abc} + 7 \cdot \overline{dbc} + 5 \cdot \overline{cad} = 2021$.

George-Florin Șerban, Brăila

Soluție. Scriem în baza 10, $100a + 10b + c + 700d + 70b + 7c + 500c + 50a + 5d = 2021$, --- 5 p
 $150a + 80b + 508c + 705d = 2021, a, c, d \neq 0$. Dacă $d \geq 3 \Rightarrow 2021 > 2115$ fals, deci $d \in \{1, 2\}$. --- 5 p
Dacă $d = 2$, rezultă $150a + 80b + 508c = 611$, fals deoarece 611 impar, $150a + 80b + 508c$ par. --- 2 p
Dacă $d = 1$, rezultă $150a + 80b + 508c = 1316, 75a + 40b + 254c = 658$. --- 3 p
Dacă $c \geq 3$ rezultă $658 > 762$ fals, deci $c \in \{1, 2\}$. --- 5 p
Dacă $c = 1$, rezultă $75a + 40b = 404$, fals deoarece $(75a + 40b) : 5$ iar $404 \not\div 5$. --- 2 p
Dacă $c = 2$ rezultă $75a + 40b = 150, 8b = 30 - 15a : 5$, rezultă $b : 5$, deci $b \in \{0, 5\}$. --- 2 p
Dacă $b = 5, 10 = -15a < 0$ fals. --- 1 p
Dacă $b = 0 \Rightarrow a = 2$ și obținem singurul număr cu această proprietate $\overline{abcd} = 2021$. --- 5 p

3. Considerăm $m = 2023!$ și $n = 2^{1011} \cdot 1011!$.

a) Arătați că $m : n$.

b) Aflați restul împărțirii la 8 a numărului $m : n$.

Gabriel Daniilescu, Brăila



Soluție: a) $m = 2023! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2021 \cdot 2022 \cdot 2023 = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2022 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2021 \cdot 2023 =$ -- 5 p
 $= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{\text{de } 1011 \text{ ori}} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 1011 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2021 \cdot 2023 = 2^{1011} \cdot 1011! \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2021 \cdot 2023 =$ -- 10 p

$= n \cdot p$, unde $p = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2021 \cdot 2023 \Rightarrow m:n$ și $m:n = p$.

b) $p = (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) \cdot (9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15) \cdot (17 \cdot 19 \cdot 21 \cdot 23) \cdot \dots \cdot (2017 \cdot 2019 \cdot 2021 \cdot 2023)$ -- 5 p

În fiecare paranteză avem un produs de 4 numere impare consecutive din $M_8 + 1, M_8 + 3, M_8 + 5$ și $M_8 + 7$, deci cu produsul din $M_8 + 1$. Produsul celor 253 de paranteze toate din $M_8 + 1$ ne dă un număr din $M_8 + 1$, deci restul împărțirii la 8 a numărului p este 1. --- 10 p