Clasa a VII a

1. Arătați că nu există numere naturale x, y care verifică relația: $49^x + 81^y = 4 \cdot 7^x \cdot 9^y$.

Dimov Adela, Brăila

Soluție: Cazul 1: Dacă $x = 0$, atunci $1 + 81^y = 4 \cdot 9^y$. Dar $u\left(1 + 81^y\right) = 2$ și $u\left(4 \cdot 9^y\right) \in \{4, 6\}$, rezultă egalitate imposibilă. 1p

Cazul 2: Dacă $y = 0$, atunci $49^x + 1 = 4 \cdot 7^x$.

x par $\Rightarrow u(49^x + 1) = 2$ și $u\left(4 \cdot 7^x\right) \in \{6, 4\}$

x impar $\Rightarrow u\left(49^x + 1\right) = 0$ și $u\left(4 \cdot 7^x\right) \in \{8, 2\}$, rezultă egalitate imposibilă. 3p

Cazul 3: Dacă $x, y \geq 1$, avem următoarele situații: 26p

x impar $\Rightarrow u\left(49^x + 81^y\right) = 0$, iar $u\left(4 \cdot 7^x \cdot 9^y\right) \in \{8, 2\}$.

x par $\Rightarrow u\left(49^x + 81^y\right) = 2$, iar $u\left(4 \cdot 7^x \cdot 9^y\right) \in \{6, 4\}$. Deci $x, y \in \varnothing$.

2. Determinați cifrele a, b, c, d știind că are loc egalitatea :

$$\overline{abcd} = (2a - b + c - d)^8 - (2a - b + c - d)^6$$

Simona Slobodeanu, Brăila

Soluție. Fie $x = 2a - b + c - d$, deoarece $1000 \leq x^8 - x^6 \leq 9999 \Rightarrow 1000 \leq x^6\left(x^2 - 1\right) \leq 9999$ 5p

Pentru $x = 0$ și $x = 1$ avem $x^6\left(x^2 - 1\right) = 0$. Pentru $x = 2 \Rightarrow 2^6\left(2^2 - 1\right) < 1000$ 5p

Pentru $x = 3 \Rightarrow 3^6\left(3^2 - 1\right) = 5832 \Rightarrow a = 5, b = 8, c = 3, d = 2 \Rightarrow 2a - b + c - d = 10 + 8 - 3 - 2 = 3$ adevărat. 10p

Pentru $x = 4 \Rightarrow 4^6\left(4^2 - 1\right) = 61440$, Fals. În concluzie, $x = 3$ și $\overline{abcd} = 5832$. 10p

3. Considerăm $ABCD$ un paralelogram și $AC \cap BD = \{O\}$. Construim pătratele $AOPQ$ și $DOST$ astfel încât Q și T de o parte și de alta a dreptei BD. Demonstrați că dacă punctele Q, O, T sunt coliniare atunci $ABCD$ romb.

Daniela și Nicolae Stănică, Brăila

Soluție: Punctele Q, O, T sunt coliniare $\Leftrightarrow \sphericalangle QOT = 180^\circ \Leftrightarrow \sphericalangle AOD = 90^\circ \Rightarrow ABCD$ este romb. 20p

Am utilizat $\sphericalangle AOQ = \sphericalangle DOT = 45^\circ$. 10p