Colegiul Național „Nicolae Bălcescu”Brăila

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Clasa a VIII a

1. Se dă cubul $[ABCDA'B'C'D']$. Fie N mijlocul segmentului $[BC]$.

a) Aflaţi lungimea muchiei cubului, ştiind că aria triunghiului $AB'N$ este egală cu $\sqrt{6}cm^2$.

b) Calculaţi sinusul unghiului dintre dreptele $A'C'$ şi AN.

Daniela Tilincă și Adriana Mihăila, Brăila

a) Notăm cu x muchia cubului . Obţinem $AN = \frac{x\sqrt{5}}{2} = B'N;\ B'A = x\sqrt{2}$. Triunghiul $AB'N$ isoscel. Fie NT înălțimea triunghiul $AB'N$. - - - - - - - - . (5p)

$$AN^2 = NT^2 + AT^2 \Rightarrow \frac{5x^2}{4} = NT^2 + \frac{2x^2}{4} \Rightarrow NT^2 = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow NT = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow Aria_{AB'N} = \frac{AB'\cdot NT}{2} = \sqrt{6}$$

$\frac{x^2\sqrt{6}}{4} = \sqrt{6} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2cm.$ - - - - - - - - - - - - (10p)

b) Unghiul dintre dreptele $A'C'$ şi AN este unghiul dintre AC şi AN. Exprimând aria triunghiului $\triangle ANC$ în două moduri, obţinem $\sin(\sphericalangle CAN) = \frac{1}{\sqrt{10}}$. - - - - - - . (15p)

2. Arătaţi că dacă $x \in \mathbb{N}^*$, atunci numărul $\sqrt{2x(2x+7)}$ este număr iraţional.

Dobraniș Ciprian, Brăila

__*Soluție:*__ Presupunem că

(10p)

$$\sqrt{2x(2x+7)} = k^2, k \in \mathbb{N} \Rightarrow 4x^2 + 14x = k^2 \Leftrightarrow (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot\frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = k^2 + \frac{49}{4} \Rightarrow \left(2x + \frac{7}{2}\right)^2 =$$

$$= k^2 + \frac{49}{4}\Big|\cdot 4 \Leftrightarrow (4x+7)^2 = 4k^2 + 49 \Leftrightarrow \underbrace{(4x+7+2k)}_{\in\mathbb{N}}(4x+7-2k) = 49 \Rightarrow 4x+7-2k \in \mathbb{N}$$

şi $4x+7-2k \le 4x+7+2k.$ - - - (10p)

Avem cazurile $\begin{cases} 4x+7-2k=1 \\ 4x+7+2k=49 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{9}{2}$, fals şi $\begin{cases} 4x+7-2k=7 \\ 4x+7+2k=7 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \notin \mathbb{N}^*$, fals. - - (5p)

(5p)

3. Considerăm tetraedrul $ABCD$ și punctele E și F situate pe muchia $[BC]$, astfel încât $BE = 1\,cm, EF = 3\,cm, FC = 8\,cm$. Pe semidreptele $(AE$ și $(AF$ se iau punctele M, respectiv N cu proprietatea $\frac{AE}{EM} = \frac{AF}{FN} = \frac{1}{3}$.

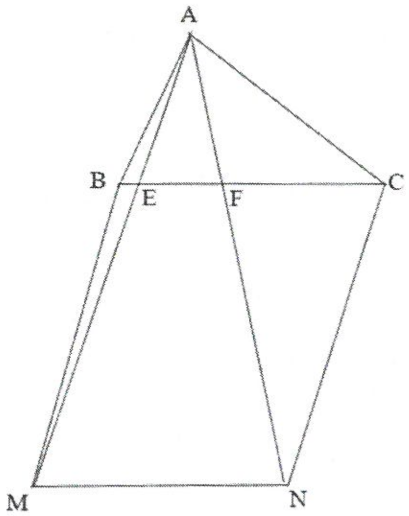
a) Demonstrați că triunghiurile ABN și ACM au același centru de greutate.

b) Determinați raportul ariilor triunghiurilor ABE și NCF.

c) Arătați că dacă P și Q sunt mijloacele muchiilor $[BD]$ respectiv $[CD]$, atunci dreapta MN este paralelă cu planul (APQ).

Gabriel Daniilescu, Brăila

<u>Soluție:</u>



a) $\frac{AE}{EM} = \frac{AF}{FN} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AE}{AM} = \frac{AF}{AN} = \frac{1}{4} \Rightarrow EF \parallel MN$ și $\frac{EF}{MN} = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow MN = 12cm$. Din $BC \parallel MN$ și $BC = MN = 12\,cm$ rezultă că $BCNM$ este paralelogram și dacă notăm $BN \cap CM = \{O\}$, rezultă că O este mijlocul lui $[BN]$ și al lui $[CM] \Rightarrow [AO]$ este mediană atât în $\triangle ABN$, cât și în $\triangle ACM$ și cum centrul de greutate al unui triunghi se află pe fiecare mediană la $\frac{2}{3}$ de vârf și $\frac{1}{3}$ de bază, rezultă că centrele de greutate ale celor două triunghiuri coincid. (5p) ---- (5p)

b)
$$\left.\begin{aligned}
\frac{A_{ABE}}{A_{ACF}} &= \frac{\frac{1}{2}\cdot BE \cdot d(A,BE)}{\frac{1}{2}\cdot CF \cdot d(A,CF)} = \frac{BE}{CF} = \frac{1}{8} \text{ — (4p)}\\
\frac{A_{ACF}}{A_{NCF}} &= \frac{\frac{1}{2}\cdot AF \cdot d(C,AF)}{\frac{1}{2}\cdot NF \cdot d(C,NF)} = \frac{AF}{NF} = \frac{1}{3} \text{ --- (4p)}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{A_{ABE}}{A_{NCF}} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{24} \text{ ... (2p)}$$

c) $[PQ]$ linie mijlocie în $\triangle DBC \Rightarrow PQ \parallel BC$ dar $BC \parallel MN \Rightarrow MN \parallel PQ$. -- (5p)

Avem $\left\{\begin{aligned} &MN \parallel PQ \\ &PQ \subset (APQ) \\ &MN \not\subset (APQ)\end{aligned}\right. \Rightarrow MN \parallel (APQ)$. ------- (5p)