SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA
FONDATĂ ÎN
1910

algebră

TRIDENT

geometrie

RMB

FONDATĂ în anul 1996

Revista de matematică din Brăila

analiză matematică

ANUL XXVII nr. 12/ Decembrie 2023

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA, FILIALA BRĂILA
REVISTA DE MATEMATICĂ DIN BRĂILA, “TRIDENT”

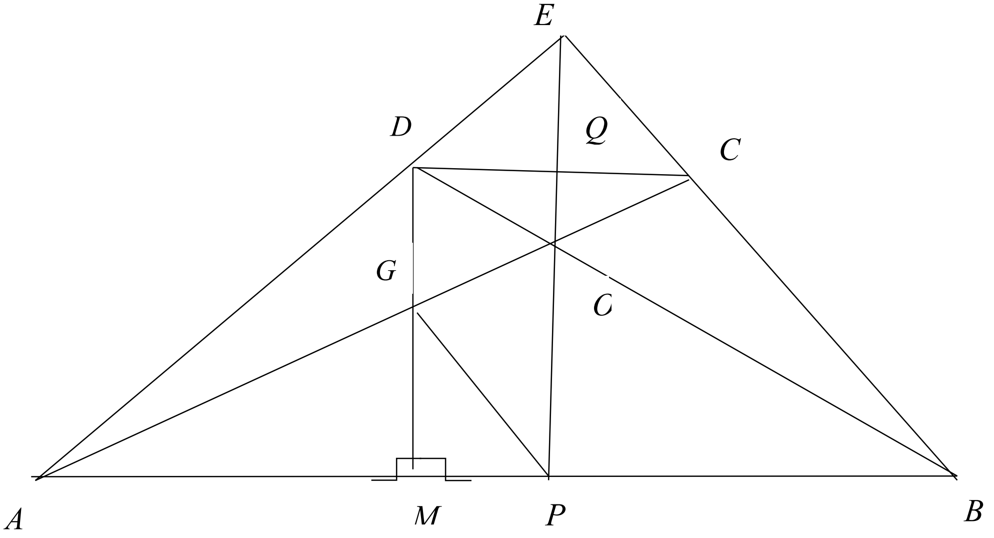
ISSN 1584-983X

Metode de rezolvare pentru o problemă dată la Evaluarea Națională 2019

de George-Florin Șerban, profesor Colegiul Naţional Pedagogic„D.P.Perpessicius”, Brăila

Vom prezenta 6 metode de rezolvare pentru una dintre problemele date la Evaluarea Națională 2019. Acest material prezintă metode specifice de rezolvare a problemelor de coliniaritate,la nivel gimnazial.Enunțul acestei probleme este:

„ Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu $AB \parallel CD$, $CD = 12\sqrt{2}m$, $AD = BC = 24m$ și $m(\measuredangle BAD) = 45^0$. Fie O este punctul de intersecție a diagonalelor trapezului $ABCD$, E punctul de intersecție a dreptelor AD și BC și punctul P mijlocul laturii AB. Demonstrați că punctele P,O și E sunt coliniare.



Metoda 1. Teoremă:”Dintr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură perpendiculară pe acea dreaptă”. Arătăm că $OP \perp AB$ și $EP \perp AB$. Aplicând această teoremă,din punctul P pe dreapta AB se duce o singură perpendiculară pe dreapta AB, rezultând că punctele P,O,E sunt coliniare. Folosim proprietatea„Unghiurile de la bază ale unui trapez isoscel sunt congruente”, deci $m(\measuredangle DAB) = m(\measuredangle ABC) = 45^0$. Triunghiul ΔEAB este isoscel deoarece are unghiurile de la bază congruente, $\measuredangle EAB \equiv \measuredangle EBA$, $[EP]$ este mediană, atunci $[EP]$ înălțime, deci $EP \perp AB$. $\Delta AOB \sim \Delta COD, \frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD}$ aplicăm proporțiile derivate, $\frac{AO}{AO+OC} = \frac{BO}{BO+OD}$, $\frac{AO}{AC} = \frac{BO}{BD}$. Folosim proprietatea:„Într-un trapez isoscel diagonalele sunt congruente”,deci $AC = BD$ rezultă $AO = BO$. Triunghiul ΔAOB este isoscel, $[OP]$ este mediană, rezultă $[OP]$ înălțime deci $OP \perp AB$. Din $OP \perp AB$ și $EP \perp AB$ rezultă că punctele P,O și E sunt coliniare.

Metoda 2. Demonstrăm că dreptele EP, AC, BD sunt concurente în punctul O, folosind reciproca Teoremei lui Ceva în triunghiul $\Delta EAB.$ Pentru început avem de calculat lungimile DE și $CE.$ $\Delta ECD \sim \Delta EAB,\ \frac{ED}{EA}=\frac{EC}{EB}=\frac{DC}{AB},$ dar $\cos(\measuredangle DAM)=\cos 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{AM}{AD}=\frac{AM}{24}, AM=12\sqrt{2},$ $AB=2AM+CD=2\cdot 12\sqrt{2}+12\sqrt{2}=36\sqrt{2}.$ Deci $\frac{ED}{EA}=\frac{EC}{EB}=\frac{12\sqrt{2}}{36\sqrt{2}}=\frac{1}{3}.$ Aplicăm proporții derivate $\frac{ED}{EA-ED}=\frac{EC}{EB-EC}=\frac{1}{3-1}, \frac{ED}{AD}=\frac{EC}{BC}=\frac{1}{2}, \frac{ED}{24}=\frac{EC}{24}=\frac{1}{2},$ deci $ED=EC=12.$

Calculăm produsul $\frac{ED}{AD}\cdot\frac{AP}{BP}\cdot\frac{BC}{EC}=\frac{12}{24}\cdot\frac{AP}{AP}\cdot\frac{24}{12}=1,$ rezultă din reciproca Teoremei lui Ceva că dreptele EP, AC, BD sunt concurente în punctul O,deci punctele P,O și E sunt coliniare.

Metoda 3. Demonstrăm că coliniaritatea folosind reciproca Teoremei lui Menelaos, în triunghiul $\Delta ABC.$ Se calculează produsul $\frac{AP}{BP}\cdot\frac{BE}{CE}\cdot\frac{CO}{AO}.$

Aplicăm Teorema Fundamentală a Asemănării, $\Delta AOB \sim \Delta COD,\ \frac{CO}{AO}=\frac{CD}{AB},\ \Delta ECD \sim \Delta EAB,$ $\frac{EB}{EC}=\frac{AB}{CD}\Rightarrow\frac{AP}{BP}\cdot\frac{BE}{CE}\cdot\frac{CO}{AO}=\frac{AP}{AP}\cdot\frac{AB}{CD}\cdot\frac{CD}{AB}=1,$ Din reciproca Teoremei lui Menelaos, în triunghiul $ABC,$ punctele P,O și E sunt coliniare.

Metoda 4. Prin această metodă se va demonstra coliniaritatea arătând că unghiul $\measuredangle EOP$ este alungit,adică $m(\measuredangle EOP)=180^o.$

Triunghiul ΔAEB este isoscel,deoarece $m(\measuredangle EAB)=\mathrm{m}(\measuredangle EBA)=45^0,$ se folosește proprietatea „Unghiurile de la bază ale unui trapez isoscel sunt congruente”, deci $m(\measuredangle AEB)=180^0-m(\measuredangle EAB)-\mathrm{m}(\measuredangle EBA)=180^0-45^0-45^0=90^0.$ În triunghiul ΔEAB isoscel, $[EP]$ este mediană rezultă $[EP]$ este bisectoare și înălțime,deci $m(\measuredangle EPB)=90^0, m(\measuredangle AEP)=m(\measuredangle BEP)=90^0:2=45^0.$

Din $AB \parallel CD \Rightarrow m(\measuredangle ECD)=m(\measuredangle EBA)=45^0$ (corespondente), $m(\measuredangle EDC)=m(\measuredangle EAB)=45^0$ (corespondente). $m(\measuredangle EOP)=m(\measuredangle EOC)+m(\measuredangle COB)+m(\measuredangle BOP).$ Se exprimă măsura fiecărui unghi. $m(\measuredangle EOC)=180^0-m(\measuredangle CEO)-m(\measuredangle ECO)=180^0-45^0-^0 m(\measuredangle ECD)-m(\measuredangle DCO),$ $m(\measuredangle EOC)=135^0-45^0-m(\measuredangle DCO)=90^0-m(\measuredangle DCO), m(\measuredangle COB)=180^0-m(\measuredangle OCB)-m(\measuredangle OBC)$ și $m(\measuredangle BOP)=90^0-m(\measuredangle OBA).$ În final se înlocuiesc cele 3 măsuri de unghiuri în formula de mai sus și obținem $m(\measuredangle EOP)=m(\measuredangle EOC)+m(\measuredangle COB)+m(\measuredangle BOP), m(\measuredangle EOP)=90^0-m(\measuredangle DCO)+$ $+180^0-m(\measuredangle OCB)-m(\measuredangle OBC)+90^0-m(\measuredangle OBA),$ $m(\measuredangle EOP)=360^0-(m(\measuredangle DCO)+m(\measuredangle OCB))-(m(\measuredangle OBC)+m(\measuredangle OBA))=360^0-(m(\measuredangle DCB)+$ $+m(\measuredangle ABC)),$ dar $m(\measuredangle DCB)+m(\measuredangle ABC)=180^0,$ sunt unghiuri interne de aceeași parte a secantei, $AB \parallel CD,$ deci $m(\measuredangle EOP)=360^0-180^0=180^0$ rezultă că punctele P,O și E sunt coliniare.

Metoda 5. Folosim Postulatul lui Eucid:„Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură paralelă la acea dreaptă”. Arătăm în continuare că $OP \parallel DM$ și $EP \parallel DM$ și din Postulatul lui Eucid rezultă că prin punctul P se duce o singură paralelă la dreapta DM,de unde rezultă că punctele P,O și E sunt coliniare. Demonstrăm că $OP \parallel DM$, folosind Reciproca Teoremei lui Thales în triunghiul ΔBDM, $\frac{BO}{OD}=\frac{BP}{PM},$ din Teorema Fundamentală a Asemănării, $\Delta AOB \sim \Delta COD, \frac{AB}{CD}=\frac{BO}{OD}, \cos(\measuredangle DAM)=\cos 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{AM}{AD}=\frac{AM}{24}, AM=12\sqrt{2},$ $AB=2AM+CD=2\cdot 12\sqrt{2}+12\sqrt{2}=36\sqrt{2},$ deci $\frac{36\sqrt{2}}{12\sqrt{2}}=\frac{BO}{OD}=3,$ $BP=\frac{AB}{2}=\frac{36\sqrt{2}}{2}=18\sqrt{2},$ $PM=AP-AM=\frac{AB}{2}-12\sqrt{2}=18\sqrt{2}-12\sqrt{2}=6\sqrt{2},$ deci $\frac{BP}{PM}=\frac{18\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}=3,$ rezultă $\frac{BO}{OD}=\frac{BP}{PM},$ din Reciproca Teoremei lui Thales în triunghiul ΔBDM, avem că $OP \parallel DM$. Triunghiul ΔEAB este isoscel deoarece are unghiurile de la bază congruente(acestea sunt unghiurile de la bază ale trapezului isoscel, care sunt congruente)adică $m(\measuredangle EAB)=\mathrm{m}(\measuredangle EBA)=45^0$ rezultă $m(\measuredangle AEB)=180^0-m(\measuredangle EAB)-\mathrm{m}(\measuredangle EBA)=180^0-45^0-45^0=90^0.$ În triunghiul isoscel $\Delta AEB,$ $[EP]$ este mediană, rezultă $[EP]$ bisectoare,adică $m(\measuredangle AEP)=\frac{m(\measuredangle AEB)}{2}=\frac{90^0}{2}=45^0,$ dar $m(\measuredangle ADM)=90^0-m(\measuredangle DAM)=90^0-45^0=45^0.$ Am obținut că $m(\measuredangle ADM)=m(\measuredangle AEP)=45^0,$ (unghiuri corespondente),rezultă $EP \parallel DM$.

Din $EP \parallel DM$ și $OP \parallel DM$ din Postulatul lui Eucid rezultă că punctele P, O și E sunt coliniare.

Metoda 6. Demonstrăm coliniaritatea folosind:” Reciproca unghiurilor opuse la vârf”. Pentru aceasta, vom arăta că $m(\measuredangle EOD)=m(\measuredangle BOP).$ Triunghiul ΔEAB este isoscel deoarece are unghiurile de la bază congruente (acestea sunt unghiurile de la bază ale trapezului isoscel,care sunt congruente)adică $m(\measuredangle EAB)=\mathrm{m}(\measuredangle EBA)=45^0,$ $[EP]$ este mediană rezultă $[EP]$ este bisectoare și înălțime, adică $m(\measuredangle AEP)=\frac{m(\measuredangle AEB)}{2}=\frac{90^0}{2}=45^0$, $m(\measuredangle ECD)=m(\measuredangle EBA)=45^0$ (corespondente), $m(\measuredangle EDC)=m(\measuredangle EAB)=45^0$ (corespondente).

Calculăm

$m(\measuredangle EOD)=180^0-m(\measuredangle DEO)-m(\measuredangle ODE)=180^0-45^0-m(\measuredangle EDC)-m(\measuredangle ODC)=135^0-45^0-$ $-m(\measuredangle ODC), m(\measuredangle EOD)=90^0-m(\measuredangle ODC)=90^0-m(\measuredangle OBA)$, deoarece $m(\measuredangle ODC)=m(\measuredangle OBA)$, (alterne interne).Iar $m(\measuredangle BOP)=90^0-m(\measuredangle OBP)=90^0-m(\measuredangle OBA)=m(\measuredangle EOD)$. S-a arătat că $m(\measuredangle EOD)=m(\measuredangle BOP)$, dar deoarece punctele B,O,D sunt coliniare, rezultă din “Reciproca teoremei unghiurilor opuse la varf” că punctele P,O și E sunt coliniare.

BIBLIOGRAFIE

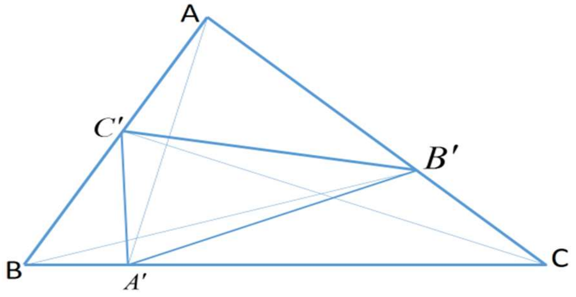
[1]Liviu Nicolescu,Vladimir Boskoff,Probleme practice de geometrie,Editura Tehnică,București-1990.

Teorema lui Routh şi câteva aplicaţii

de Neculai Stanciu, Buzău

1. Fie triunghiul $ABC, A'\in(BC), B'\in(CA)$, $C'\in(AB), x=\frac{BA'}{A'C}, y=\frac{CB'}{B'A}, z=\frac{AC'}{C'B}$. Atunci

$[A'B'C']=\frac{xyz+1}{(x+1)(y+1)(z+1)}\cdot[ABC]$, unde $[ABC]=aria\left(\triangle ABC\right)$.



$$BA'=\frac{ax}{x+1}\ ,\ CB'=\frac{by}{y+1}\ ,\ AC'=\frac{cz}{z+1}\ ,\ A'C=\frac{a}{x+1}\ ,\ B'A=\frac{b}{y+1}\ ,\ C'B=\frac{c}{z+1}\ ;$$

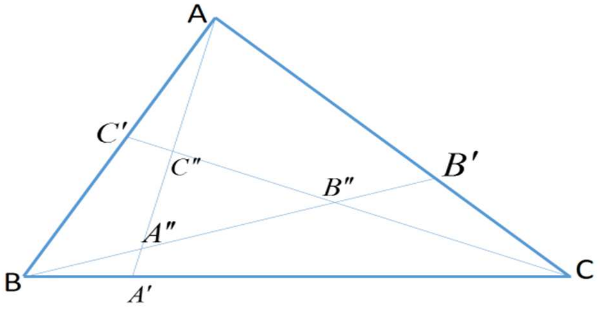
$$[A'B'C']=[ABC]-[A'BC']-[A'CB']-[B'AC']=[ABC]-\frac{A'B\cdot C'B\cdot\sin B}{2}-\frac{A'C\cdot B'C\cdot\sin C}{2}-$$

$$-\frac{B'A\cdot C'A\cdot\sin A}{2}=[ABC]-\frac{acx\cdot\sin B}{2(x+1)(z+1)}-\frac{aby\cdot\sin C}{2(x+1)(y+1)}-\frac{bcz\cdot\sin A}{2(y+1)(z+1)}=$$

$$=[ABC]\left(1-\frac{x}{(x+1)(z+1)}-\frac{y}{(x+1)(y+1)}-\frac{z}{(y+1)(z+1)}\right)=\frac{xyz+1}{(x+1)(y+1)(z+1)}\cdot[ABC]$$

2. Fie triunghiul $ABC, A'\in(BC), B'\in(CA)$, $C'\in(AB), x=\frac{BA'}{A'C}, y=\frac{CB'}{B'A}, z=\frac{AC'}{C'B}$. $AA'\cap BB'=\{A''\}$, $BB'\cap CC'=\{B''\}$, $CC'\cap AA'=\{C''\}$. Atunci:

$[A''B''C'']=\frac{(xyz-1)^2}{(xy+x+1)(yz+y+1)(zx+z+1)}\cdot[ABC]$, unde $[ABC]=aria\left(\triangle ABC\right)$.



$$BA'=\frac{ax}{x+1},\ CB'=\frac{by}{y+1},\ AC'=\frac{cz}{z+1},\ A'C=\frac{a}{x+1},\ B'A=\frac{b}{y+1},\ C'B=\frac{c}{z+1};$$

$$[ABA'']=\frac{AA''}{AA'}\cdot[ABA']=\frac{AA''}{AA'}\cdot\frac{BA'}{BC}\cdot[ABC]=\frac{AA''}{AA'}\cdot\frac{ax}{(x+1)a}\cdot[ABC];$$

Aplicând teorema lui Menelaus pentru triunghiul $AA'C$ cu transversala $B-A''-B'$, rezultă

$$\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CB}{BA'}\cdot\frac{A'A''}{A''A}=1\Leftrightarrow\frac{1}{y}\cdot\frac{x+1}{x}\cdot\frac{A'A''}{A''A}=1\Leftrightarrow\frac{A'A''}{A''A}=\frac{xy}{x+1}\Rightarrow\frac{AA''}{AA'}=\frac{x+1}{xy+x+1};$$

$$[ABA'']=\frac{x+1}{xy+x+1}\cdot\frac{ax}{(x+1)a}\cdot[ABC]=\frac{x}{xy+x+1}\cdot[ABC];$$

Analog: $[BCB'']=\frac{y}{yz+y+1}\cdot[ABC]$; $[CAC'']=\frac{z}{zx+z+1}\cdot[ABC]$

$$[A''B''C'']=[ABC]-[ABA'']-[BCB'']-[CAC'']=\frac{(xyz-1)^2}{(xy+x+1)(yz+y+1)(zx+z+1)}\cdot[ABC].$$

Aplicaţia 1. Fie ΔABC, $A',A''\in(BC)$, $B',B''\in(CA)$, $C',C''\in(AB)$, $AA'\cap BB'\cap CC'=\{P\}$, $AA''\cap BB''\cap CC''=\{Q\}$, $x'=\frac{BA'}{A'C},y'=\frac{CB'}{B'A}$, $z'=\frac{AC'}{C'B},x''=\frac{BA''}{A''C},y''=\frac{CB''}{B''A}$, $z''=\frac{AC''}{C''B}$. Dacă notăm cu $[XYZ]$ aria triunghiului XYZ, atunci să se demonstrez că: $\frac{[A'B'C']}{[A''B''C'']}=\frac{BA'}{BA''}\cdot\frac{CB'}{CB''}\cdot\frac{AC'}{AC''}$.

Soluţie: Avem: $BA'=\frac{ax'}{x'+1},CB'=\frac{by'}{y'+1},AC'=\frac{cz'}{z'+1},A'C=\frac{a}{x'+1},\ B'A=\frac{b}{y'+1},\ C'B=\frac{c}{z'+1};$

$$BA''=\frac{ax''}{x''+1},\ CB''=\frac{by''}{y''+1},\ AC''=\frac{cz''}{z''+1},\ A''C=\frac{a}{x''+1},\ B''A=\frac{b}{y''+1},\ C''B=\frac{c}{z''+1};$$

$$\frac{BA'}{BA''}=\frac{x'(x''+1)}{x''(x'+1)},\frac{CB'}{CB''}=\frac{y'(y''+1)}{y''(y'+1)},\frac{AC'}{AC''}=\frac{z'(z''+1)}{z''(z'+1)}..$$

Din teorema lui Routh obţinem

$$[A'B'C']=\frac{x'y'z'+1}{(x'+1)(y'+1)(z'+1)}[ABC],[A''B''C'']=\frac{x''y''z''+1}{(x''+1)(y''+1)(z''+1)}[ABC].$$

Din teorema lui Ceva avem $x'y'z'=x''y''z''=1$. Deci $\frac{[A'B'C']}{[A''B''C'']}=\frac{(x''+1)(y''+1)(z''+1)}{(x'+1)(y'+1)(z'+1)}$ şi

$$\frac{BA'}{BA''}\cdot\frac{CB'}{CB''}\cdot\frac{AC'}{AC''}=\frac{x'(x''+1)}{x''(x'+1)}\cdot\frac{y'(y''+1)}{y''(y'+1)}\cdot\frac{z'(z''+1)}{z''(z'+1)}=\frac{(x''+1)(y''+1)(z''+1)}{(x'+1)(y'+1)(z'+1)}.$$

Aşadar, $\frac{[A'B'C']}{[A''B''C'']}=\frac{BA'}{BA''}\cdot\frac{CB'}{CB''}\cdot\frac{AC'}{AC''}$.

Aplicaţia 2. Fie triunghiul ABC, $A'\in(BC)$, $B'\in(CA)$, $C'\in(AB)$ astfel încât $BA'=A'C$, $CB'=2AB'$ şi $C'A=3BC'$. Dacă $AA'\cap BB'=\{A''\}$, $BB'\cap CC'=\{B''\}$,

$CC'\cap AA'=\{C''\}$, atunci să se calculeze $\frac{A_{A'B'C'}}{A_{A''B''C''}}$.

Soluţie: Notăm $x=\frac{BA'}{A'C}=1, y=\frac{CB'}{B'A}=2, z=\frac{AC'}{C'B}=3$. Din teorema lui Routh avem

$$A_{A'B'C'}=\frac{xyz+1}{(x+1)(y+1)(z+1)}\cdot A_{ABC}\quad \text{şi}\quad A_{A''B''C''}=\frac{(xyz-1)^2}{(xy+x+1)(yz+y+1)(zx+z+1)}\cdot A_{ABC}.$$

În cazul nostru $A_{A'B'C'}=\frac{7}{24}\cdot A_{ABC}$ şi $A_{A''B''C''}=\frac{25}{36\cdot 7}\cdot A_{ABC}$. Deci $\frac{A_{A'B'C'}}{A_{A''B''C''}}=\frac{147}{50}$.

Aplicaţia 3. Fie triunghiul ABC, $A'\in(BC), B'\in(CA), C'\in(AB)$ cu $x=\frac{BA'}{A'C}, y=\frac{CB'}{B'A}, z=\frac{AC'}{C'B}$.

Dacă $AA'\cap BB'\cap CC'=\{P\}$, atunci să se demonstreze că $\frac{A_{A'B'C'}}{A_{ABC}}=\frac{2}{xy+yz+zx+x+y+z+2}$.

Soluţie: Din teorema lui Routh avem $A_{A'B'C'}=\frac{xyz+1}{(x+1)(y+1)(z+1)}\cdot A_{ABC}$, (1).

Din teorema lui Ceva avem $xyz=1$, (2). Din (1) şi (2) rezultă concluzia.

Inegalitatea triunghiului –aplicații în probleme de olimpiadă

Tilincă Daniela şi Mihailă Adriana, profesori, Brăila

Teoremă: Trei numere a,b,c pot fi laturile unui triunghi dacă $a,b,c>0$ și

$$|b - c| < a < b+c; |a - c| < b < a+c; |b - a| < c < a+b.$$

APLICAȚII

1) Dacă a,b,c sunt laturile unui triunghi atunci are loc relatia

$$\frac{3}{2} \le \frac{b+c}{b+c+2a} + \frac{a+c}{a+c+2b} + \frac{a+b}{a+b+2c} < \frac{5}{3} (ONM - 2016 - \text{clasa a-VIII-a})$$

***Soluție*:**

Inegalitatea intră in categoria inegalitătilor conditionate , numerele a,b,c fiind laturile unui triunghi, sunt pozitive si verifică inegalitatea triunghiului , adică $a<b+c, b<c+a, c<a+b$

În prima parte înlocuind $b+c+2a=m;\ a+c+2b=n; a+b+2c=p \Rightarrow a=\frac{3m-n-p}{4};$

$$b=\frac{3n-m-p}{4}; c=\frac{3p-n-m}{4}$$

$$\frac{3}{2} \le \frac{n+p-m}{2m} + \frac{m+p-n}{2n} + \frac{m+n-p}{2p} / \cdot 2 \ \Rightarrow$$

$\left(\frac{n}{m}+\frac{m}{n}\right)+\left(\frac{m}{p}+\frac{p}{m}\right)+\left(\frac{n}{p}+\frac{p}{n}\right) \ge 6$ adevarată deoarece pentru $a,b>0 \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge 2.$

$$a<b+c \ \Leftrightarrow 3a+3b+3c>4a+2b+2c \Leftrightarrow \frac{2}{3(a+b+c)} < \frac{1}{2a+b+c} \Leftrightarrow \frac{4a}{3(a+b+c)} < \frac{2a}{2a+b+c}$$

$\Leftrightarrow \frac{4a}{3(a+b+c)} < 1 - \frac{b+c}{2a+b+c}$; analog $\frac{4b}{3(a+b+c)} < 1 - \frac{a+c}{2b+a+c}$; $\frac{4c}{3(a+b+c)} < 1 - \frac{a+b}{2c+a+b}$

adunând inegalitătile obtinem $\frac{4}{3} < 3 - (\frac{b+c}{b+c+2a} + \frac{a+c}{a+c+2b} + \frac{a+b}{a+b+2c}) \Leftrightarrow$

$$\frac{b+c}{b+c+2a} + \frac{a+c}{a+c+2b} + \frac{a+b}{a+b+2c} < \frac{5}{3}.$$

2) Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghi atunci are loc dubla inegalitate

$$ab + ac + bc \le a^2 + b^2 + c^2 < 2ab + 2ac + 2bc.$$

***Soluție*:**

Prima parte este o inegalitate cunoscută care prin înmultirea cu 2 devine $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 \ge 0$
Pentru partea a doua folosim inegalitatea tringhiului sub forma $|b - c| < a; |a - c| < b; |b - a| < c,$ care prin ridicare la pătrat devine$(b - c)^2 < a^2; (a - c)^2 < b^2; (a - b)^2 < c^2$ si adunate parte cu parte, deci $a^2 + b^2 + c^2 < 2ab + 2ac + 2bc.$

3) Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghi atunci are loc inegalitatea

$$a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3 \text{(concurs Ungaria)}$$

***Soluție*:**

Inegalitatea se poate deconditiona astfel: a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi dacă si numai dacă exista trei numere pozitive x, y, z astfel încât să avem $a = y + z, b = z + x, c = x + y$ si înlocuind în inegalitate obtinem neconditionată

$$(y + z)(y - z)^2 + (z + x)(z - x)^2 + (x + y)(x - y)^2 + 4(x + y)(x + z)(y + z) > (y + z)^3 + (x + z)^3 + (y + x)^3$$
$$\Leftrightarrow 8xyz > 0$$

4) Arătati că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea

$$\frac{a}{p^2 + ap + bc} + \frac{b}{p^2 + bp + ca} + \frac{c}{p^2 + cp + ba} < \frac{1}{p}, \text{ unde } p = \text{semiperimetrul triunghiului}$$

***Soluție*:**

Folosim inegalitatea triunghiului sub forma $|b - c| < a; |a - c| < b; |b - a| < c$
si prin ridicare la pătrat $\Rightarrow (b - c)^2 < a^2; (a - c)^2 < b^2; (a - b)^2 < c^2 \Rightarrow (b + c)^2 - a^2 < 4bc \Rightarrow$

$$p(p - a) < bc \Rightarrow p^2 < ap + bc \Rightarrow \frac{1}{p^2 + ap + bc} < \frac{1}{2p^2} \Rightarrow \frac{a}{p^2 + ap + bc} < \frac{a}{2p^2}; \text{analog}$$

$$\frac{b}{p^2 + bp + ca} < \frac{b}{2p^2}; \frac{c}{p^2 + bp + ca} < \frac{c}{2p^2} \Rightarrow \frac{a}{p^2 + ap + bc} + \frac{b}{p^2 + bp + ca} + \frac{c}{p^2 + cp + ba} < \frac{1}{p}.$$

5) Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghi atunci are loc inegalitatea

$$a^2 b(a - b) + b^2 c(b - c) + c^2 a(c - a) \ge 0 \ (OIM)$$

***Soluție*:**

Inegalitatea se poate deconditiona astfel: a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi dacă si numai dacă exista trei numere pozitive x,y,z astfel încât să avem $a=y+z, b=z+x, c=x+y$ înlocuind în inegalitate obtinem neconditionată

$(y+z)^2(z+x)(y-x)+(z+x)^2(x+y)(z-y)+(x+y)^2(y+z)(x-z)\geq 0 \Rightarrow$

$xy^3+yz^3+zx^3\geq x^2yz+y^2xz+z^2xy \;/\!:xyz \Rightarrow \frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y}\geq x+y+z$ si folosind inegalitatea

$\frac{y^2}{a}+\frac{z^2}{b}+\frac{x^2}{c}\geq\frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$ $;a,b,c>0(CBS)$ obtinem $\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y}\geq\frac{(x+y+z)^2}{x+y+z}=x+y+z.$

6) Dacă a,b,c,d sunt laturile unui patrulater atunci are loc inegalitatea

$$(a+b+c-d)(b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c)\leq(a+b)(b+c)(c+d)(d+a).$$

***Soluție*:**

Dacă a,b,c,d sunt laturile unui patrulater atunci $a,b,c,d>0$ si suma oricaror trei dintre ele este mai mare decât al patrulea . Deconditionăm inegalitatea folosind substitutiile

$x=b+c+d-a; y=c+d+a-b; z=d+a+b-c; t=a+b+c-d \Rightarrow x,y,z,t>0 \Rightarrow$

$a=\frac{y+z+t-x}{4}\;\; b=\frac{x+z+t-y}{4} c=\frac{y+x+t-z}{4}\;\; t=\frac{y+z+x-t}{4}\Rightarrow xyzt\leq\frac{z+t}{2}\cdot\frac{x+t}{2}\cdot\frac{y+x}{2}\cdot\frac{z+y}{2}$

care se sparge în $\sqrt{zt}\leq\frac{z+t}{2},\sqrt{xt}\leq\frac{x+t}{2},\sqrt{zy}\leq\frac{z+y}{2},\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}$ cu egalitate dacă $x=y=z=t\Rightarrow a=b=c=d.$

Folosind metodele menționate mai sus rezolvați exercițiile:

1) Dacă a,b,c sunt laturile unui triunghi atunci are loc inegalitatea

$$\frac{2}{3}\leq\frac{a}{b+c+2a}+\frac{b}{a+c+2b}+\frac{c}{a+b+2c}<1.$$

2) Dacă a,b,c sunt laturile unui triunghi atunci are loc inegalitatea $(a+b+c)^2<4(ab+bc+ca)$

3) Arătati că dacă a,b,c sunt laturile unui triunghi atunci are loc inegalitatea

$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\leq\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ unde p este semiperimetrul triunghiului.

Bibliografie:

1) ”Vă place matematica”-Traian Cohal –editura Moldova

2) “Inegalități-idei și metode”Mihai Onucu Drimbe-editura Gil

3) “Olimpiadele naționale ale României și Republicii Moldova” -Artur Bălăuca-editura Taida.

Teorema lui Wilson

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

Lemă. Dacă *p* este un număr prim, atunci $x^2 \equiv 1(\bmod p)$ dacă și numai dacă $x \equiv \pm 1(\bmod p)$.

Demonstrație. Fie p un număr prim. Dacă $x^2 \equiv 1(\bmod p)$, adică $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \equiv 0(\bmod p)$, atunci, având în vedere că *p* este prim, fie $p|x-1$, fie $p|x+1$. Așadar, $x \equiv \pm 1(\bmod p)$.

Corolar. Dacă p este un număr prim, atunci, pentru orice număr natural a din intervalul $[2, p-2]$, inversul său multiplicativ modulo *p* este cuprins tot între 2 și $p-2$ și este diferit de *a*.

Teorema lui Wilson. Un număr natural $p > 1$ este prim dacă și numai dacă $(p-1)! \equiv -1(\bmod p)$.

Demonstrație. Fie $p > 1$ un număr natural.

Dacă *p* este compus, atunci *p* sigur se poate scrie ca produsul a două numere *a* și *b*, unde $2 \le a \le \sqrt{p} \le b \le p-2$. Distingem două cazuri.

Dacă $a \ne b$, atunci atât a cât și b apar în lista $2, 3, ..., p-2$, de unde $ab|(p-1)!$, adică $(p-1)! \equiv 0(\bmod p) \ne -1(\bmod p)$. În schimb, dacă $a = b = \sqrt{p}$, atunci avem alte două cazuri.

Dacă $p = 4$, obținem $(p-1)! = 6 \ne -1(\bmod p)$. Dacă $p > 4$, atunci $a > 2$, așa că $2a < a^2 = p$. Prin urmare, atât a cât și $2a$ se regăsesc în lista $2, 3, ..., p-1$. Deci, $a^2|(p-1)!$, adică $(p-1)! \equiv 0(\bmod p) \ne -1(\bmod p)$.

Dacă p este prim, avem două cazuri. Dacă $p = 2$, atunci $(p-1)! = 1 \equiv -1(\bmod p)$. Altfel, numărul de elemente din lista $2, 3, ..., p-2$ este par. Deci, conform corolarului de mai sus, putem grupa aceste elemente în $(p-1)/2$ perechi de numere (a, b), cu proprietatea că $ab \equiv 1(\bmod p)$. Prin urmare, $(p-1)! \equiv p-1 \equiv -1(\bmod p)$.

Așadar, $(p-1)! \equiv -1(\bmod p)$ dacă și numai dacă *p* este număr p

APLICAȚII

1. Fie p un număr întreg impar prim, mai mare decât 1. Demonstrați că:

$1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot ... \cdot (p-2)^2 \equiv (-1)^{(p+1)/2} (\bmod p)$.

Soluție:

Aplicând teorema lui Wilson, avem $(p-1)! \equiv -1(\bmod p)$, unde p este un număr impar prim. De asemenea, avem $i \equiv -(p-i)(\bmod p)$. Înmulțind toate numerele impare până la $p-2$, obținem $1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (p-2) \equiv (-1)^{(p-1)/2} (p-1)(p-3) \cdot ... \cdot 2(\bmod p)$. Înmulțind relația cu $1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (p-2)$, obținem: $1^2 \cdot 3^2 \cdot ... \cdot (p-2)^2 \equiv (-1)^{(p-1)/2} (p-1)! \equiv (-1)^{(p+1)/2} (\bmod p)$.

2. Fie p un număr prim și $N = 1+2+3+...+(p-1) = \frac{(p-1)p}{2}$. Demonstrați că: $(p-1)! \equiv p-1(\bmod N)$.

Soluție:

Cum p este un număr prim, aplicând teorema lui Wilson, avem $(p-1)! \equiv -1(\bmod p)$. Există un număr întreg m astfel încât: (*) $(p-1)! = mp-1 = (m-1)p + (p-1)$

Din relația (*) rezultă că $(m-1)p = (p-1)! - (p-1) = (p-1)k$, unde $k = (p-2)! - 1$ și $p \mid (p-1)k$.

Cum $cmmdc(p;(p-1)) = 1$, rezultă că $p \mid k$. Fie $k = np$ pentru care avem relația:

(**) $(m-1)p = (p-1)pn$, deci $(m-1) = n(p-1)$.Aplicând relația (**) în relația (*), obținem:

$(p-1)! = [n(p-1)+1]p - 1 = n(p-1)p + (p-1) = 2n[(p-1)p/2] + p - 1 = 2nN + p - 1$

Din relația de mai sus rezultă că $(p-1)! \equiv p-1(\bmod N)$.

3. Determinați toate numerele pozitive întregi n cu proprietatea că există o permutare $a_1, a_2, ..., a_n$ a numerelor $0, 1, 2, ..., n-1$, astfel încât resturile împărțirii numerelor $a_1, a_1a_2, ..., a_1a_2...a_n$ la n să fie distincte.

Soluție:

Când n este un număr prim p, avem $a_1 = 1$ și alte numere întregi a_i care satisfac relația $0 \le a_i \le p-1$ și $ia_{i+1} \equiv i+1(\bmod p)$ pentru $i = 2, ..., p$. Rezultă că atunci când împărțim numerele $a_1, a_1a_2, ..., a_1a_2...a_n$ la n obținem resturile $1, 2, ..., p$. De asemenea, din relația

$ia_{i+1} \equiv i+1 \pmod p$ deducem că $a_{i+1}-1$ este inversul lui i. Deci, $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt distincte. Atunci când $n=1$ sau $n=4$, permutările (0), $(1,3,2,0)$ satisfac condiția. Când $n>4$ este compus, dacă $n=p^2$, fie $q=2p<n$. Altfel, $n=pq$ cu $1<p<q<n$, astfel încât $pq|(n-1)!$ Dacă permutarea cerută există, atunci relațiile $a_n=0$ și $a_1a_2...a_{n-1}=(n-1)! \equiv 0 \pmod n$ se contrazic. De fapt, când $n>4$ este compus, $n|(n-1)!$ și $3! \equiv -2 \pmod 4$, astfel încât și reciproca teoremei lui Wilson se verifică.

4. Fie numerele întregi n și q care îndeplinesc condițiile $n \geq 5$ și $n \geq q \geq 2$. Demonstrați că $\left[(n-1)!/q\right]$ este divizibil cu $q-1$.

Soluție:

(1) Dacă $n>q$, atunci $(q-1)q|(n-1)!$ și rezultă că $(q-1)\|\left[(n-1)!/q\right]$.

(2) Dacă $q=n$ și q este număr compus, atunci $\left[(n-1)!/q\right]=(n-1)!/n$. Cu $cmmdc((n-1);n)=1$ și $q-1=n-1$ care divide $(n-1)!$, rezultă că $(q-1)\|\left[(n-1)!/q\right]$.

(3) Dacă $q=n$ și q este număr prim, atunci rezultă din aplicarea teoremei lui Wilson că $(n-1)! \equiv -1 \pmod n \Leftrightarrow (n-1)!+1=kn, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left[(n-1)!/q\right]=k-1$ și $(k-1)n=(n-1)!+1-n \Rightarrow k-1=((n-2)!-1)(n-1)/n$ este număr întreg. Cum $cmmdc((n-1);n)=1 \Rightarrow n|(n-2)!-1$. De aici rezultă că $\left[(n-1)!/q\right]=k-1$ este multiplu de $n-1$.

5. Fie polinomul $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, unde $a_0, a_1, ..., a_n$ sunt numere întregi, iar $a_n>0$ și $n \geq 2$. Demonstrați că există numere întregi *m* astfel încât $P(m!)$ este număr compus.

Soluție:

(1) Dacă $a_0=0$, atunci $m!|P(m!)$, de unde rezultă că $P(m!)$ este număr compus.

(2) Fie $S(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$ și presupunem că $a_0 \neq 0$. Din teorema lui Wilson, pentru orice număr prim *p* și orice număr întreg par $k<p$, avem:

$$(k-1)!(p-k)! \equiv (-1)^{k-1}(p-k)!(p-k+1)(p-k+2)(p-1) = -(p-1)! \equiv 1 \pmod p$$

Deci, avem $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$ și $((k-1)!)^n P((p-k)!) \equiv S((k-1)!) \pmod p$. Rezultă că

$p \mid P\left(\left(p-k\right)!\right)$ dacă și numai dacă $p \mid S\left(\left(k-1\right)!\right)$. Fie $k > 2a_n + 1$. Rezultă că $u = \left(k-1\right)!/\,a_n$ este număr întreg divizibil cu toate numerele întregi prime mai mici decât *k*.

6. Dacă p și $p+2$ sunt concomitent numere prime, atunci spunem despre ele că sunt numere prime gemene. Arătați că dacă p și $p+2$ sunt prime gemene, atunci $4\left(p-1\right)!+4+p$ este divizibil cu $p\left(p+2\right)$.

Soluție:

Dacă p și $p+2$ sunt numere prime, atunci $p>2$ astfel încât p și $p+2$ sunt numere impare. Din teorema lui Wilson avem că $\left(p-1\right)! \equiv -1\left(\bmod p\right)$ și $\left(p+1\right)! \equiv -1\left(\bmod p+2\right)$ și rezultă că $4\left(p-1\right)!+4+p \equiv 0\left(\bmod p\right)$. De asemenea, $4\left(p-1\right)!+4+p \equiv -p\left(p+1\right)p\left[\left(p+1\right)!+1\right] \equiv$

$\equiv -p\left[\left(p+1\right)!+2\right] \equiv -p\left(\bmod p+2\right) \Leftrightarrow 4\left(p-1\right)!+4+p \equiv 0\left(\bmod p+2\right)$. Cum $cmmdc\left(p, p+2\right)=1$ avem $4\left(p-1\right)!+4+p \equiv 0\left(\bmod p\left(p+2\right)\right)$.

7. Fie p un număr prim mai mare sau egal decât 5, iar *m, n* numere întregi și relativ prime pentru care se verifică relația: $\frac{m}{n} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{\left(p-1\right)^2}$. Demonstrați că *p* este divizor al lui *m*, iar p^2 este divizor al numărului

$$\left(p-1\right)!\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{p-1}\right).$$

Soluție:

Dacă numărul întreg *k* nu este divizibil cu *p*, atunci există numere întregi *a, b,* astfel încât $ak + bp = cmmdc\left(k, p\right) = 1$. Spunem atunci despre *a* că este inversul lui *k* în mod *p* și vom scrie echivalent numărul *a* sub forma $a = k^{-1}$. De aici rezultă că avem:

$$\left(\left(p-1\right)!\right)^2 \frac{m}{n} = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{\left(\left(p-1\right)!\right)^2}{k^2} \equiv \left(-1\right)^2 \left(1^2 + 2^2 + ... + \left(p-1\right)^2\right) \equiv \frac{\left(p-1\right)p\left(2p-3\right)}{6} \equiv 0\left(\bmod p\right)$$

Cum $cmmdc\left(\left(p-1\right)!, p\right)=1$, rezultă că $p \mid m$. Fie $S = \left(p-1\right)!\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{p-1}\right)$. Atunci rezultă că $2S=(p-1)!\sum_{i=1}^{p-1}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{p-i}\right)=p\sum_{i=1}^{p-1}\left(\frac{(p-1)!}{i(p-i)}\right)=pT$, unde $2S,p,T$ sunt numere întregi.

Cum $cmmdc(p,2)=1$, rezultă că p divide *S*. Deoarece $p|m$, $T=\sum_{i=1}^{p-1}\left(\frac{(p-1)!}{i(p-i)}\right)=(p-1)!\frac{m}{n}\equiv 0(\bmod p)$.

PROBLEME PROPUSE

1. Ce rest dă numărul $7^{7007}\cdot 11^{1001}$ la împărțirea cu 6 ?
2. Ce rest dă numărul $36^{36}+21^{21}$ la împărțirea cu 6 ?
3. Ce rest dă numărul $97!$ la împărțirea cu 101 ?
4. Care va fi restul împărțirii numărului 225! este împărțit la 227?
5. Ce rest dă numărul $2016!-2015!$ la împărțirea cu 2017?
6. Care sunt ultimele două cifre ale numărului $19^{41}\cdot 9^{93}$?
7. Calculaţi restul împărţirii numărului $68^{67}\cdot 67^{68}$ la 21.
8. Demonstraţi că ecuaţia $2^x+7^y=19^z$ nu are soluţii în mulţimea numerelor naturale.
9. Demonstraţi că $(p-2)!\equiv 1 \bmod p$ dacă p este număr prim.
10. Demonstraţi că dacă n este un număr natural compus mai mare decât 4 atunci $(n-1)!\equiv 0(\bmod n)$ dacă p este număr prim.

● Bibliografie:

1. Titu Andreescu, Dorin Andrica – O introducere în studiul ecuaţiilor diofantiene, Ed.Gil,Zalău,2002

2. Artur Bălăucă, Ioan Ţicalo – Algebră, Probleme semnificative pentru concursurile şcolare, Botoşani, 1995

3. Ion Cucurezeanu – Probleme de aritmetică şi teoria numerelor,

4. Laurenţiu Panaitopol, Alexandru Gica – Probleme de aritmetică şi teoria numerelor (idei şi metode de rezolvare), Ed. Gil, Zalău, 2006 [5]

5. Gazeta Matematică

6. Romanian Mathematical Competitions 2006 – 2011

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN “ MICII BĂLCEȘTI” - 7.12.2023

Clasa a IV a

1. Determinați numărul natural *a* din egalitatea:

$$\left[\left(792+51:17\right):15+39\right]:23+6\times a=100$$

***

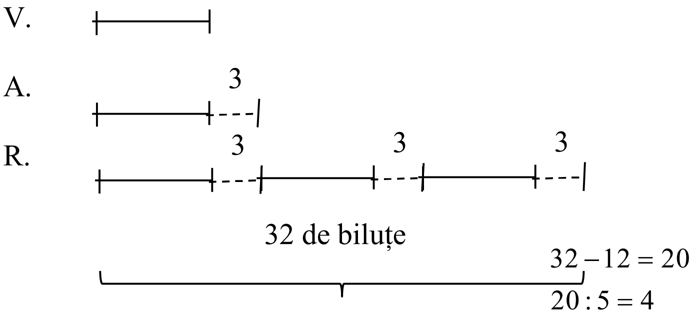
Soluție:

$$\left[\left(792+51:17\right):15+39\right]:23+6\times a=100\Leftrightarrow\left(795:15+39\right):23+6\times a=100\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(53+39\right):23+6\times a=100\Rightarrow 92:23+6\times a=100\Rightarrow 4+6\times a=100\Rightarrow 6\times a=96\Rightarrow a=16$$

2. Andreea are în rucsacul de excursie 32 de biluțe : unele sunt albe , unele roșii și altele verzi. Cele mai puține sunt biluțele verzi. Biluțele albe sunt cu 3 mai multe decât cele verzi, iar cele roșii sunt de 3 ori mai multe decât biluțele albe. Câte biluțe roșii are Andreea ?

***

Soluție:



$32-12=20$

$20:5=4$

Deci, valoarea fiecărui segment este 4, de unde rezultă că Andreea are $3\cdot\left(4+3\right)=21$ biluțe roșii.

3. Folosiți operațiile +, $-$, $\cdot$ și $:$ între numerele de la 1 la 9 , în această ordine, pentru a obține 100.

***

Soluție:

O soluție poate fi: $123+45-67+8-9=100$.

Clasa a V a

1. Un jucător de şah are la dispoziţie 5 zile de pregătire pentru o competiţie. El se antrenează jucând cel puţin o partidă pe zi, dar nu mai mult de 14 partide în total. Arătaţi că există cel puţin 2 zile în care joacă acelaşi număr de partide. Justificaţi răspunsul.

***

Soluţie: Dacă numărul partidelor din cele 5 zile nu se repetă numărul minim de partide este
$1+2+3+4+5=15, 15>14$
deci, măcar în 2 zile se joacă acelaşi număr de partide

2. Aflați numerele naturale nenule *n* cu proprietățile: împărțind *n* la 17 obținem câtul egal cu restul împărțirii lui *n* la 19 și împărțind *n* la 19 obținem câtul egal cu restul împărțirii lui *n* la 17.

***

<u>Soluție:</u>

$$\left.\begin{array}{l} n=17x+y, \quad y<17 \\ n=19y+x, \quad x<19 \end{array}\right\} \Rightarrow 17x+y=19y+x \Rightarrow 16x=18y \Rightarrow 8x=9y \Rightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=8 \end{cases} \text{sau } \begin{cases} x=18 \\ y=16 \end{cases}.$$

Deci soluțiile sunt $n=17\cdot 9+8=161$ și $n=17\cdot 18+16=322$.

3. Aflați numerele naturale de trei cifre, care împărțite la 28 dau câtul pătrat perfect și restul cub perfect.

***

<u>Soluție:</u>

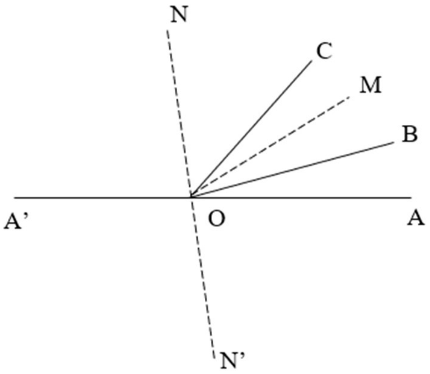
$n=28\cdot c^2+k^3 \Rightarrow k^3<28 \Rightarrow k^3=0;1;8;27$.

Avem numere de 3 cifre, atunci: $c^2=4;9;16;25$

Avem posibilitățile:

$n=28\cdot 4+0=112, n=28\cdot 4+1=113, n=28\cdot 4+8=120, n=28\cdot 4+27=139, n=28\cdot 9+0=252,$
$n=28\cdot 9+1=253, n=28\cdot 9+8=260, n=28\cdot 9+27=279, n=28\cdot 16+0=448, n=28\cdot 16+1=449,$
$n=28\cdot 16+8=456, n=28\cdot 16+27=475, n=28\cdot 25+0=700, n=28\cdot 25+1=701, n=28\cdot 25+8=708,$
$n=28\cdot 25+27=727.$

Clasa a VI a



1. În interiorul unghiului $\sphericalangle AOC$ se ia punctul B, astfel încât $\sphericalangle AOC=50^{\circ}$, $\sphericalangle AOB=20^{\circ}$. Considerăm $(OM$ bisectoarea $\sphericalangle BOC$ și $(ON$ bisectoarea $\sphericalangle A'OC$, unde $(OA'$ este semidreapta opusă lui $(OA$. Aflați măsura unghiului $\sphericalangle MON'$, unde $(ON'$ este semidreapta opusă lui $(ON$.

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

<u>Soluție:</u> $\widehat{MON}=\dfrac{\widehat{BOC}+\widehat{A'OC}}{2}\Rightarrow \widehat{BOC}=\widehat{AOC}-\widehat{AOB}=50^\circ-20^\circ=30^\circ,\widehat{A'OC}=180^\circ-50^\circ=130^\circ$

$\widehat{MON}=\dfrac{130^\circ+30^\circ}{2}=80^\circ\Rightarrow \widehat{MON'}=180^\circ-\widehat{MON}=180^\circ-80^\circ=100^\circ.$

2. Aflaţi toate numerele de forma $\overline{abcd}$ care verifică relaţia $\overline{abc}+7\cdot\overline{dbc}+5\cdot\overline{cad}=2021$.

George-Florin Şerban, Brăila

<u>Soluție</u>. Scriem în baza 10, $100a+10b+c+700d+70b+7c+500c+50a+5d=2021,$

$150a+80b+508c+705d=2021, a,c,d\neq 0.$ Dacă $d\geq 3\Rightarrow 2021>2115$ fals,deci $d\in\{1,2\}$.

Dacă $d=2,$ rezultă $150a+80b++508c=611,$ fals deoarece 611 impar, $150a+80b++508c$ par.

Dacă $d=1,$ rezultă $150a+80b+508c=1316, 75a+40b+254c=658.$

Dacă $c\geq 3$ rezultă $658>762$ fals, deci $c\in\{1,2\}$.

Dacă $c=1,$ rezultă $75a+40b=404,$ fals deoarece $(75a+40b)\vdots 5$ iar $404\not\vdots 5.$

Dacă $c=2$ rezultă $75a+40b=150, 8b=30-15a\vdots 5,$ rezultă $b\vdots 5,$ deci $b\in\{0,5\}$.

Dacă $b=5, 10=-15a<0$ fals.

Dacă $b=0\Rightarrow a=2$ şi obţinem singurul număr cu această proprietate $\overline{abcd}=2021.$

3. Considerăm $m=2023!$ și $n=2^{1011}\cdot 1011!$.

a) Arătați că $m\vdots n$.

b) Aflați restul împărțirii la 8 a numărului $m:n$.

Gabriel Daniilescu, Brăila

Soluție: a) $m = 2023! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2021\cdot 2022\cdot 2023 = 2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdot\ldots\cdot 2022\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 2021\cdot 2023 =$
$= \underbrace{2\cdot 2\cdot\cdot\ldots\cdot 2}_{\text{de 1011 ori}}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 1011\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot 2021\cdot 2023 = 2^{1011}\cdot 1011!\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot 2021\cdot 2023 =$
$= n\cdot p$, unde $p = 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot 2021\cdot 2023 \Rightarrow m \,\vdots\, n$ si $m : n = p$.
b) $p = (1\cdot 3\cdot 5\cdot 7)\cdot(9\cdot 11\cdot 13\cdot 15)\cdot(17\cdot 19\cdot 21\cdot 23)\cdot\ldots\cdot(2017\cdot 2019\cdot 2021\cdot 2023)$

În fiecare paranteză avem un produs de 4 numere impare consecutive din M_8+1, M_8+3, M_8+5 și M_8+7, deci cu produsul din M_8+1. Produsul celor 253 de paranteze toate din M_8+1 ne dă un număr din M_8+1, deci restul împărțirii la 8 a numărului p este 1.

Clasa a VII a

1. Arătați că nu există numere naturale x, y care verifică relația: $49^x + 81^y = 4\cdot 7^x\cdot 9^y$.

Dimov Adela, Brăila

Soluție: Cazul 1: Dacă $x=0$, atunci $1+81^y = 4\cdot 9^y$. Dar $u\left(1+81^y\right)=2$ și $u\left(4\cdot 9^y\right)\in\{4,6\}$, rezultă egalitate imposibilă.

Cazul 2: Dacă $y=0$, atunci $49^x+1=4\cdot 7^x$.

x par $\Rightarrow u(49^x+1)=2$ și $u\left(4\cdot 7^x\right)\in\{6,4\}$

x impar $\Rightarrow u\left(49^x+1\right)=0$ și $u\left(4\cdot 7^x\right)\in\{8,2\}$, rezultă egalitate imposibilă.

Cazul 3: Dacă $x, y\geq 1$, avem următoarele situații:

x impar $\Rightarrow u\left(49^x+81^y\right)=0$, iar $u\left(4\cdot 7^x\cdot 9^y\right)\in\{8,2\}$.

x par $\Rightarrow u\left(49^x+81^y\right)=2$, iar $u\left(4\cdot 7^x\cdot 9^y\right)\in\{6,4\}$. Deci $x, y\in\varnothing$.

2. Determinați cifrele a,b,c,d știind că are loc egalitatea :

$$\overline{abcd} = (2a-b+c-d)^8 - (2a-b+c-d)^6$$

Simona Slobodeanu, Brăila

Solutie. Fie $x = 2a-b+c-d$, deoarece $1000\leq x^8-x^6\leq 9999 \Rightarrow 1000\leq x^6\left(x^2-1\right)\leq 9999$.

Pentru $x=0$ și $x=1$ avem $x^6\left(x^2-1\right)=0$. Pentru $x=2\Rightarrow 2^6\left(2^2-1\right)<1000$.

Pentru $x=3\Rightarrow 3^6\left(3^2-1\right)=5832\Rightarrow a=5, b=8, c=3, d=2\Rightarrow 2a-b+c-d=10+8-3-2=3$ adevărat.

Pentru $x=4\Rightarrow 4^6\left(4^2-1\right)=61440$, Fals. În concluzie, $x=3$ și $\overline{abcd}=5832$.

3. Considerăm $ABCD$ un paralelogram și $AC \cap BD = \{O\}$. Construim pătratele $AOPQ$ și $DOST$ astfel încât Q și T de o parte și de alta a dreptei BD. Demonstrați că dacă punctele Q, O, T sunt coliniare atunci $ABCD$ romb.

Daniela și Nicolae Stănică, Brăila

<u>Soluție:</u> Punctele Q, O, T sunt coliniare $\Leftrightarrow \sphericalangle QOT = 180^\circ \Leftrightarrow \sphericalangle AOD = 90^\circ \Rightarrow ABCD$ este romb. Am utilizat $\sphericalangle AOQ = \sphericalangle DOT = 45^\circ$.

Clasa a VIII a

1. Se dă cubul $[ABCDA'B'C'D']$. Fie N mijlocul segmentului $[BC]$.

a) Aflaţi lungimea muchiei cubului, ştiind că aria triunghiului $AB'N$ este egală cu $\sqrt{6}cm^2$.

b) Calculaţi sinusul unghiului dintre dreptele $A'C'$ şi AN.

Daniela Tilincă și Adriana Mihăila, Brăila

a) Notăm cu x muchia cubului . Obţinem $AN = \dfrac{x\sqrt{5}}{2} = B'N;\ B'A = x\sqrt{2}$. Triunghiul $AB'N$ isoscel. Fie NT înălțimea triunghiul $AB'N$.

$$AN^2 = NT^2 + AT^2 \Rightarrow \frac{5x^2}{4} = NT^2 + \frac{2x^2}{4} \Rightarrow NT^2 = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow NT = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow Aria_{AB'N} = \frac{AB' \cdot NT}{2} = \sqrt{6}$$

$$\frac{x^2\sqrt{6}}{4} = \sqrt{6} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2cm.$$

b) Unghiul dintre dreptele $A'C'$ şi AN este unghiul dintre AC şi AN. Exprimând aria triunghiului $\triangle ANC$ în două moduri, obţinem $\sin(\sphericalangle CAN) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

2. Arătaţi că dacă $x \in \mathbb{N}^*$, atunci numărul $\sqrt{2x(2x+7)}$ este număr iraţional.

Dobraniș Ciprian, Brăila

Soluție: Presupunem că

$$\sqrt{2x(2x+7)}=k^2, k\in\mathbb{N}\Rightarrow 4x^2+14x=k^2\Leftrightarrow(2x)^2+2\cdot 2x\cdot\frac{7}{2}+\left(\frac{7}{2}\right)^2=k^2+\frac{49}{4}\Rightarrow\left(2x+\frac{7}{2}\right)^2=$$

$$=k^2+\frac{49}{4}\Big|\cdot 4\Leftrightarrow(4x+7)^2=4k^2+49\Leftrightarrow\underbrace{(4x+7+2k)}_{\in\mathbb{N}}(4x+7-2k)=49\Rightarrow 4x+7-2k\in\mathbb{N}$$

şi $4x+7-2k\le 4x+7+2k$.

Avem cazurile $\begin{cases}4x+7-2k=1\\4x+7+2k=49\end{cases}\Rightarrow x=\frac{9}{2}$, fals şi $\begin{cases}4x+7-2k=7\\4x+7+2k=7\end{cases}\Rightarrow x=0\notin\mathbb{N}^*$, fals.

3. Considerăm tetraedrul $ABCD$ și punctele E și F situate pe muchia $[BC]$, astfel încât $BE=1\,cm, EF=3\,cm, FC=8\,cm$. Pe semidreptele $(AE$ și $(AF$ se iau punctele M, respectiv N cu proprietatea $\frac{AE}{EM}=\frac{AF}{FN}=\frac{1}{3}$.

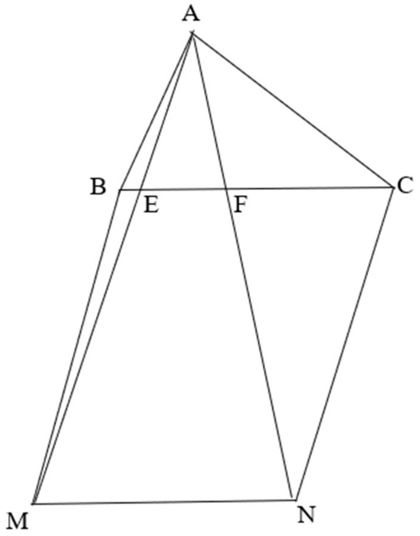
a) Demonstrați că triunghiurile ABN și ACM au același centru de greutate.

b) Determinați raportul ariilor triunghiurilor ABE și NCF.

c) Arătați că dacă P și Q sunt mijloacele muchiilor $[BD]$ respectiv $[CD]$, atunci dreapta MN este paralelă cu planul (APQ).

Gabriel Daniilescu, Brăila

Soluție:



a) $\frac{AE}{EM}=\frac{AF}{FN}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{AE}{AM}=\frac{AF}{AN}=\frac{1}{4}\Rightarrow EF\parallel MN$ și $\frac{EF}{MN}=\frac{1}{4}$ $\Rightarrow MN=12cm$. Din $BC\parallel MN$ și $BC=MN=12\,cm$ rezultă că $BCNM$ este paralelogram și dacă notăm $BN\cap CM=\{O\}$, rezultă că O este mijlocul lui $[BN]$ și al lui $[CM]\Rightarrow[AO]$ este mediană atât în $\triangle ABN$, cât și în $\triangle ACM$ și cum centrul de greutate al unui triunghi se află pe fiecare mediană la $\frac{2}{3}$ de vârf și $\frac{1}{3}$ de bază, rezultă că centrele de greutate ale celor două triunghiuri coincid.

b)
$$\left.\begin{aligned}\frac{A_{ABE}}{A_{ACF}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot BE\cdot d(A,BE)}{\frac{1}{2}\cdot CF\cdot d(A,CF)}=\frac{BE}{CF}=\frac{1}{8}\\ \frac{A_{ACF}}{A_{NCF}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot AF\cdot d(C,AF)}{\frac{1}{2}\cdot NF\cdot d(C,NF)}=\frac{AF}{NF}=\frac{1}{3}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{A_{ABE}}{A_{NCF}}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{24}$$

c) $[PQ]$ linie mijlocie în $\triangle DBC\Rightarrow PQ\parallel BC$ dar $BC\parallel MN\Rightarrow MN\parallel PQ$.

$$\text{Avem}\begin{cases}MN\parallel PQ\\ PQ\subset(APQ)\\ MN\not\subset(APQ)\end{cases}\Rightarrow MN\parallel(APQ).$$

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2022-2023
ETAPA LOCALĂ

CLASA A V-A

SUBIECTUL 1

Determinați numărul natural $\overline{abcd}$ pentru care are loc relația $\overline{abcd}+2\cdot\overline{abc}-2022=0$.

Gazeta matematică nr.9/2022

***Soluție*:**

$\overline{abc}\cdot 10+d+2\cdot\overline{abc}=2022\Rightarrow 12\cdot\overline{abc}+d=2022$. Observăm că $12\cdot\overline{abc}$ se împarte la 6,
2022 se împarte la $6\Rightarrow d$ se împarte $6\Rightarrow d=0$ sau $d=6$.
Dacă $d=6\Rightarrow 12\cdot\overline{abc}+6=2022\Rightarrow 12\cdot\overline{abc}=2016\Rightarrow\overline{abc}=2016:12\Rightarrow\overline{abc}=168\Rightarrow\overline{abcd}=1686$.
Dacă $d=0\Rightarrow 12\cdot\overline{abc}=2022$, fals, deoarece 2022 nu se împarte la 12.
Deci $\overline{abcd}=1686$.

SUBIECTUL 2

Comparați numerele A și B știind că $A=3^{22}+2^{32}$ și $B=8^{12}-7\cdot 8^{11}$.

Daniela Stănică și Nicolae Stănică, Brăila

***Soluție*:**

Avem $A=3^{22}+2^{32} > 2^{33}+2^{32}=2^{32}(2+1)=2^{32}\cdot 3$ (1)

Dar $B=2^{36}-7\cdot 2^{33}=2^{32}(2^4-7\cdot 2^1)=2^{32}(16-14)=2^{32}\cdot 2$ (2)

Din (1) și (2) se obține că $A>B$.

SUBIECTUL 3

Aflați numerele naturale nenule n pentru care $2^{2n-1}\cdot 5^n+56$ este pătrat perfect.

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

***Soluție*:**

Pentru $n=1\Rightarrow 2\cdot 5+56=66$, nu este pătrat perfect.

Pentru $n=2\Rightarrow 2^3\cdot 5^2+56=256=16^2$.

Pentru $n\geq 3\Rightarrow 2^{2n-1}\cdot 5^n+56=2^3\left(2^{2n-4}\cdot 5^n+7\right)$.

Dacă este pătrat perfect atunci $\left(2^{2n-4}\cdot 5^n+7\right)\vdots 2$ ceea ce este fals deoarece $2n-4\geq 2$ și 2^{2n-4} este număr par, deci $2^{2n-4}\cdot 5^n+7$ este număr imparrezultă $2^3\left(2^{2n-4}\cdot 5^n+7\right)\vdots 2^3$ și $\not\vdots\, 2^4$, adică nu este pătrat perfect. Atunci $n=2$ este singura soluție.

SUBIECTUL 4

Determinați numărul perechilor (x,y) de numere naturale care verifică relația

$$35x+28y=1421.$$

Mihaela Giurcă și Nicoleta Dincă, Brăila

***Soluție*:**

$7\cdot 5x+7\cdot 4y=7\cdot 203\Rightarrow 7(5x+4y)=7\cdot 203\Rightarrow 5x+4y=203$ Restul împărțirii lui 203 la 4 este 3 deci x are forma $4k+3$, k număr natural

$\Rightarrow 5(4k+3)+4y=203\Rightarrow 20k+15+4y=203\Rightarrow 20k+4y=188\Rightarrow 4(5k+y)=188\Rightarrow 5k+y=47.$

Se observă că $0\leq 5k\leq 47\Rightarrow 0\leq k\leq 9$. Deci pentru fiecare din cele 10 valori ale lui *k*, obținem o valoare naturală a lui x respectiv a lui y. Deci relația este verificată pentru 10 perechi (x,y) de forma $(4k+3,47-5k)$, unde $k=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$.

$S=\left(23\cdot 4+17\right)+\left(23\cdot 5+17\right)+...+\left(23\cdot 42+17\right)=23\left(4+5+...+42\right)+17\cdot 39=23\cdot 897+663=21294.$

CLASA A VI-A

SUBIECTUL 1

Determinați numerele prime a,b,c care verifică relația:

$$17a^2+136b+38c=2023$$

Mihaela Baltă, Brăila

***Soluție*:**

$38c=2023-17a^2-136b=17\left(119-a^2-8b\right)\vdots 17,\left(38,17\right)=1\Rightarrow c\vdots 17$ și c număr prim rezultă

$c=17\Rightarrow 17a^2+136b=1377\big|:17\Rightarrow a^2+8b=81$, a număr impar

$a=3\Rightarrow b=9$ (nu e număr prim); $a=5\Rightarrow b=7$; $a=7\Rightarrow b=4$ (nu e număr prim).

SUBIECTUL 2

Demonstrați că, dacă a,b,c sunt numere naturale nenule și $2a+31b=29c$, atunci $(a+b)(b+c)(c+a)$ este divizibil cu 1798.

Supliment Gazeta Matematică,2022

***Soluție*:**

$2a+31b=29c \Rightarrow 31(a+b)=29(a+c)$, $(31,29)=1 \Rightarrow (a+b)\vdots 29$ și $(a+c)\vdots 31$.

$2a+31b=29c \Rightarrow 2(a+b)+29(b+c)=58c \Rightarrow 29(b+c)\vdots 2 \Rightarrow (b+c)\vdots 2 \Rightarrow$

$(a+b)(b+c)(c+a)\vdots(2\cdot 29\cdot 31)$.

SUBIECTUL 3

Fie A,B,C,D puncte coliniare, în această ordine, iar M și N mijloacele segmentelor AC și BC. Calculați lungimile segmentelor AB și AD știind că sunt îndeplinite simultan condițiile: $5\cdot AB+4\cdot BC-3\cdot CD=29\,cm$, $5\cdot BC=6\cdot CD$ și $MN=2\,cm$.

Mihaela Baltă, Brăila

***Soluție*:**

$$MN=MC-NC=\frac{AC}{2}-\frac{BC}{2}=\frac{AB}{2}=2 \Rightarrow AB=4\,cm.$$

$$4\cdot BC-3\cdot CD=9\,cm;\ 5\cdot BC=6\cdot CD \Rightarrow BC=\frac{6CD}{5} \Rightarrow BC=6\,cm \text{ și } CD=5\,cm$$

$$AD=AB+BC+CD=15\,cm.$$

SUBIECTUL 4

Fie unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle AOC$ suplementare neadiacente ($\sphericalangle AOB<90^0$). Se construiesc $OD\perp OA$, $[OD\subset Int(\sphericalangle AOC)$ și $OE\perp OC$ (punctele E și B sunt de o parte și de alta a dreptei OC).

a) Arătați că punctele M, O, N sunt coliniare, unde $[OM$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle COD$ și $[ON$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOE$.

b) Aflați măsura unghiului $\sphericalangle AOB$ astfel încât $ON\perp OB$.

Mirela Mihaela Tarța, Brăila

***Soluție*:**

a) $\sphericalangle COD+\sphericalangle EOA=180^0$

$$\sphericalangle MON=\sphericalangle MOC+\sphericalangle COE+\sphericalangle EON=\frac{\sphericalangle COD}{2}+\sphericalangle COE+\frac{\sphericalangle EOA}{2}\Rightarrow \sphericalangle MON=180^0 \Rightarrow M,O,N$$

puncte coliniare.

b) $\sphericalangle COD = \sphericalangle AOC - \sphericalangle DOA = \sphericalangle AOC - 90^0 = 90^0 - \sphericalangle AOB, \sphericalangle EOA = \sphericalangle AOB + 90^0$

$$\sphericalangle BON = \sphericalangle AOB + \sphericalangle AON = \frac{3\sphericalangle AOB + 90^0}{2} \Rightarrow \sphericalangle AOB = 30^0.$$

CLASA A VII-A

SUBIECTUL 1

Considerăm

$$A = \frac{1}{1\cdot 6} + \frac{1}{2\cdot 9} + \frac{1}{3\cdot 12} + ... + \frac{1}{99\cdot 300} \quad \text{şi}$$

$$B = \sqrt{\frac{1}{7} + \left(\frac{9}{14} + \frac{10}{21} + ... \frac{70}{441}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{63}\right)}\ . \quad \text{Calculaţi } A\cdot B + \frac{1}{100}.$$

Supliment Gazeta Matematică nr. 9/2022

Soluţie:

$$A = \frac{1}{1\cdot 6} + \frac{1}{2\cdot 9} + \frac{1}{3\cdot 12} + ... + \frac{1}{99\cdot 300} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{99\cdot 100}\right) \Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} .... + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) = \frac{99}{300}.$$

$$B = \sqrt{\frac{1}{7} + \left(\frac{9}{14} + \frac{10}{21} + ... \frac{70}{441}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{63}\right)} = \sqrt{\frac{1}{7} + \left(\frac{9}{14} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{10}{21} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{70}{441} - \frac{1}{63}\right)}$$

$$B = \sqrt{\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + ... \frac{1}{7}} = \sqrt{\frac{1}{7}\cdot 63} = 3 \Rightarrow A\cdot B + \frac{1}{100} = \frac{99}{300}\cdot 3 + \frac{1}{100} = 1.$$

SUBIECTUL 2

Determinați cel mai mic număr natural x pentru care $\sqrt{2+\sqrt{0+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{x}}}}} \in N$.

George Florin Șerban, Brăila,Gazeta Matematică nr 9/2022

Soluţie:

$\sqrt{x} \in N \Rightarrow x = a^2$, $\sqrt{2+\sqrt{x}} \in N \Rightarrow 2 + a = b^2 \Rightarrow \sqrt{0+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{x}}}} = \sqrt{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{x}}}} \in N$

rezultă $2 + b = c^4$ $\sqrt{2+\sqrt{0+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{x}}}}} \in N \Rightarrow 2 + c = d^2 \geq 4 \Rightarrow d \geq 2,$

$a, b, c, d \in N, c = d^2 - 2,\ b = c^4 - 2 = (d^2-2)^4 - 2,\ a = b^2 - 2 = [(d^2-2)^4 - 2]^2 - 2,$

$x = a^2 = \{[(d^2-2)^4 - 2]^2 - 2\}^2$. Valoarea minimă a lui x se obține pentru $d = 2$.

$x=\left\{[(2^2-2)^4-2]^2-2\right\}^2=[(2^4-2)^2-2]^2=(14^2-2)^2=194^2=37636,\ x=37636$ valoarea minimă.

SUBIECTUL 3

Fie triunghiul *ABC* şi *M*,*N*,*P* simetricele punctelor *A*,*B*,*C* faţă de centrul de greutate *G* al triunghiului *ABC*. Arătaţi că:

a) $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$

b) $A_{ANC}=A_{ABP}=A_{BCM}=\dfrac{1}{3}A_{ABC}$.

Adriana Mihăilă, Brăila

Soluţie:

a) Fie R,S,T respectiv mijloacele segmentelor BC,AB,AC, *G* centru de greutate al triunghiului $ABC\Rightarrow BG=2GS\Rightarrow GS=SN$ si $AS=SC\Rightarrow ANCG$ paralelogram atunci $AN=GC; AN\parallel GC; AG=NC, AG\parallel NC$

G centru de greutate triunghi $ABC\Rightarrow AG=2GR\ \Rightarrow GR=RM$ si $BR=RC\Rightarrow BGCM$ paralelogram $BM=GC; BM\parallel GC; BG=MC, BG\parallel MC$

G centru de greutate triunghi $\triangle ABC\Rightarrow CG=2GT\Rightarrow GT=TP$ si $BT=TA\Rightarrow AGBP$ paralelogram $BP=GA; BP\parallel GA; AP=BG, BG\parallel AP\Rightarrow AN=BM; AN\parallel BM\Rightarrow ANMB$ paralelogram $\Rightarrow AB=MN\Rightarrow AP=CM; AP\parallel CM\Rightarrow APMC$ paralelogram $\Rightarrow AC=PM\Rightarrow CN=BP; CN\parallel BP\Rightarrow BCNP$ paralelogram $\Rightarrow BC=PN\Rightarrow\triangle ABC\equiv\triangle MNP$, (LLL).

b) Demonstrăm că: $A_{AGC}=A_{AGB}=A_{BGC}=\dfrac{1}{3}A_{ABC}$

În triunghiul *ABC*, *AR* mediană $\Rightarrow A_{ABR}=A_{ARC}$. În triunghiul *BGC*,*GR* mediană $\Rightarrow A_{BGR}=A_{GRC}\Rightarrow A_{AGB}=A_{AGC}$. Analog în triunghiul *ABC*,*CT* mediană $\Rightarrow A_{ACT}=A_{BCT}$

În triunghiul *AGB*,*GT* mediană

$\Rightarrow A_{AGT}=A_{BGT} => A_{AGC}=A_{BGC}\Rightarrow A_{AGC}=A_{AGB}=A_{BGC}=\dfrac{1}{3}A_{ABC}$

ANCG paralelogram $\Rightarrow A_{ANC}=A_{AGC}=\dfrac{1}{3}A_{ABC}$; *APBG* paralelogram $\Rightarrow A_{ABP}=A_{AGB}=\dfrac{1}{3}A_{ABC}$.

BGCM paralelogram $\Rightarrow A_{BMC}=A_{BGC}=\dfrac{1}{3}A_{ABC}\Rightarrow A_{ANC}=A_{ABP}=A_{BCM}=\dfrac{1}{3}A_{ABC}$.

SUBIECTUL 4

Fie paralelogramul $ABCD$ cu măsura unghiului $A < 90^0$, M și Q picioarele perpendicularelor duse din A pe BC respectiv CD iar N și P picioarele perpendicularelor duse din C pe AB respectiv pe AD.

a) Arătaţi că $MNPQ$ este dreptunghi .

b) Arătaţi că dreptele MP, QN şi AC sunt concurente.

Daniela Tilincă, Brăila

Soluţie:

$\Delta DPC \equiv \Delta AMB(I.U) \Rightarrow PC = AM; \sphericalangle PCD \equiv \sphericalangle BAM; DP = BM.$

$\Delta QAD \equiv \Delta BCN(I.U) \Rightarrow CN = QA; \sphericalangle QAD \equiv \sphericalangle BCN; QD = BN \Rightarrow$

$\Delta PCN \equiv \Delta QAM(LUL) \Rightarrow QM = PN(1)$

$\Delta QDP \equiv \Delta MBN \Rightarrow QP = MN(2)$; din (1)+(2) $\Rightarrow MNPQ$ paralelogram.

$AQCN$ dreptunghi $\Rightarrow QN = AC$ (3)

$AMCP$ dreptunghi $\Leftrightarrow PM = AC$ (4)

din relatiile (3),(4) $\Rightarrow QN = PM \Rightarrow MNPQ$ dreptunghi.

b) $AQCN$ dreptunghi $\Rightarrow QN \cap AC = \{O\}, O$ mijlocul segmentelor $[AC],[QN]$

$AMCP$ dreptunghi $\Rightarrow PM \cap AC = \{O_1\}; O_1$ mijlocul segmentelor$[PM],[AC] \Rightarrow$

$\Rightarrow O \equiv O_1 \Rightarrow QN \cap AC \cap PM = \{O\}.$

CLASA A VIII-A

SUBIECTUL 1

a) Dacă $a,b > 0$ arătați că $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2.$

b) Dacă $a,b,c > 0$ și $a+b+c=2$ demonstrați că $\frac{2-a^2}{a}+\frac{2-b^2}{b}+\frac{2-c^2}{c} \geq 7.$

Gazeta Matematică

Soluţie:

b) $\frac{2-a^2}{a}+\frac{2-b^2}{b}+\frac{2-c^2}{c} \geq 7 \Leftrightarrow \frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}-(a+b+c) \geq 7 \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9 \Rightarrow$ inegalitate care

$\Rightarrow \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c) \geq 9$ care se demonstrează ușor folosind $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$ pentru $a,b > 0.$

SUBIECTUL 2

Să se determine numerele reale a,b cu $a<b$ care verifică relațiile: $[a,b] \cap \mathbb{Z} = \{1\}$ și

$|b-a-2| = a^2+b^2-4b+\frac{9}{2}.$

Daniela Cerchez, Brăila

Soluţie:

Din prima relație avem că $b-a<2$ adică $b-a-2<0$. Înlocuim în a doua relație și obținem

$$|b-a-2|=-(b-a-2)=a-b+2 \Rightarrow a-b+2=a^2+b^2-4b+4,5 \Rightarrow a^2+b^2-a-3b+2,5=0$$

Adică $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{3}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$ si $b=\frac{3}{2}$.

SUBIECTUL 3

Fie $ABCDEF$ o prismă triunghiulară regulată şi punctele A_1, B_1 şi C_1 astfel încât $A_1 \in (AD), B_1 \in (BE), C_1 \in (CF)$ şi $AA_1=\frac{3}{4}BB_1=\frac{3}{2}CC_1$. Dacă $(ABC)\cap(A_1B_1C_1)=d$, demonstrați că $d \perp BC$.

Daniela Cerchez, Nicolae Frâncu, Brăila

Soluţie:

Notez $\{M\}=AC\cap A_1C_1, \{N\}=AB\cap A_1B_1, \{P\}=BC\cap B_1C_1$ și avem cu T.F,A avem

$$\frac{MC}{MA}=\frac{CC_1}{AA_1}=\frac{2}{3}, \frac{NA}{NB}=\frac{AA_1}{BB_1}=\frac{2}{3}, \frac{PA}{PB}=\frac{CC_1}{BB_1}=\frac{2}{3}$$

atunci M, N, P coliniare și $d=MN$. Prin urmare dacă latura $AB=a$, avem $CM=2a$ și $AN=3a$. Deci triunghiul AMN este isoscel $AN=AM=3a$ cu $\sphericalangle M=\sphericalangle N=30^0$.

Deci triunghiul NBP are $\sphericalangle B=60^0, \sphericalangle N=30^0 \Rightarrow \sphericalangle P=90^0 \Rightarrow d=MN \perp BC$.

SUBIECTUL 4

În prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ latura bazei are lungimea a.

a) Dacă $A'B \perp AC'$, calculați înălțimea prismei $ABCDA'B'C'D'$.

b) Considerăm E și F mijloacele muchiilor $[BB']$ respectiv $[DD']$, $C'F \cap DC=\{P\}, C'E \cap BC=\{Q\}$. Arătați că punctele P, A și Q sunt coliniare.

Daniela Cerchez, Nicolae Frâncu, Brăila

Soluţie:

a) $CD' \parallel A'B$. Ducem $C'M \parallel D'C, C'M \parallel D'C \Rightarrow CM=D'C'=a \Rightarrow AC' \perp C'M$.;

În $\vartriangle ADM \Rightarrow AM^2=a^2+4a^2=5a^2$, iar în $\vartriangle C'CM \Rightarrow C'M^2=a^2+h^2$, unde $CC'=h$

În $\vartriangle ACC' \Rightarrow AC'^2=2a^2+h^2 \Rightarrow AM^2=AC'^2+C'M^2 \Rightarrow 5a^2=3a^2+2h^2 \Rightarrow 2a^2=2h^2 \Rightarrow a=h$

$\Rightarrow ABCDA'B'C'D'$ este cub.

b) EB este linie mijlocie $\Rightarrow CQ=2a, FD$ este linie mijlocie $\Rightarrow PC=2a \Rightarrow \vartriangle CPQ$ este isoscel.

CA bisectoare $\Rightarrow CA=a\sqrt{2}, PQ=2a\sqrt{2}, CA=\frac{PQ}{2}$.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2022-2023

ETAPA LOCALĂ

CLASA A IX-A

prezentare de *Nicolae Frâncu*

1. Arătați că $\sqrt{\frac{a}{b+1}}+\sqrt{\frac{b}{a+1}}\le\frac{a+b+1}{a+1}$, pentru orice $a,b\in[0,+\infty), a\le b.$

Daniela Iconaru, Brăila

***Soluție*:**

$\sqrt{\frac{a}{b+1}\cdot 1}+\sqrt{\frac{b}{a+1}\cdot 1}\le\frac{\frac{a}{b+1}+1}{2}+\frac{\frac{b}{a+1}+1}{2}=\frac{\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}}{2}+1$ (1). Dacă $a\le b\Rightarrow\frac{a}{b+1}\le\frac{b}{a+1}$ (2).

Din relațiile (1) și (2) rezultă $\frac{\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}}{2}+1\le\frac{b}{a+1}+1=\frac{a+b+1}{a+1}$.

2. Demonstrați că pentru orice număr natural nenul n are loc inegalitatea:

$$\frac{n!}{\left(1+1^2\right)\cdot\left(2+2^2\right)\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot\left(n+n^2\right)}\le\frac{1}{2^n}.\quad (n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\ldots\cdot n)$$

Irina Dinescu, Brăila

***Soluție*:**

Notăm cu $P(n):\frac{n!}{\left(1+1^2\right)\cdot\left(2+2^2\right)\cdot\ldots\ldots\ldots\left(n+n^2\right)}\le\frac{1}{2^n}$

Verificăm $P(1)\Rightarrow\frac{1!}{1+1^2}\le\frac{1}{2}$ (A)

Presupunem $P(n)$ (A) și demonstrăm că și $P(n+1)$ este (A).

$$\frac{(n+1)!}{\left(1+1^2\right)\cdot\left(2+2^2\right)\cdot\ldots\ldots\ldots\left(n+n^2\right)\cdot\left[n+1+(n+1)^2\right]}\le\frac{1}{2^n}\cdot\frac{n+1}{n+1+(n+1)^2}$$

$$\frac{n+1}{n+1+(n+1)^2}=\frac{1}{n+2}<\frac{1}{2},\ \frac{(n+1)!}{\left(1+1^2\right)\cdot\left(2+2^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(n+n^2\right)\cdot\left[n+1+(n+1)^2\right]}\le\frac{1}{2^{n+1}}\Rightarrow$$

$P(n)$ (A) pentru orice număr $n\in\mathbb{N}^*$.

3. Rezolvați ecuația $\left[34\sqrt{7}\cdot x\right]\cdot\left\{34\sqrt{7}\cdot x\right\}=2023\cdot x^2-1$, unde $[a]$ și $\{a\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real a.

Daniela Iconaru, Brăila

***Soluție*:**

Notăm $34\sqrt{7}\cdot x=a\Rightarrow 2023\cdot x^2=\dfrac{a^2}{4}$. Relația devine $[a]\cdot\{a\}=\dfrac{a^2}{4}-1\Rightarrow\left([a]-\{a\}\right)^2=4\Rightarrow$

$[a]-\{a\}=2\Rightarrow\{a\}=[a]-2\in\mathbb{Z}\Rightarrow\{a\}=0\Rightarrow a=[a]=2\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{7}}{119}$

$[a]-\{a\}=-2\Rightarrow\{a\}=[a]+2\in\mathbb{Z}\Rightarrow\{a\}=0\Rightarrow a=[a]=-2\Rightarrow x=-\dfrac{\sqrt{7}}{119}$

4. Fie $ABCDE$ un pentagon înscris într-un cerc și H_1,H_2,H_3,H_4 ortocentrele**n**triunghiurilor ABC, BCD,CDE respectiv ACE. Arătați că patrulaterul $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram.

Irina Dinescu, Brăila

***Soluție*:** Folosind relația lui Sylvester pentru punctul O centrul cercului circumscris și H_1,H_2,H_3,H_4 ortocentrele triunghiurilor ABC,BCD,CDE respectiv ACE găsim: $\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OH_2}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OH_3}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OH_4}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}$.

$\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{OH_2}-\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AD}$, Analog $\overrightarrow{H_4H_3}=\overrightarrow{AD}\Rightarrow H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram.

CLASA A X-A

1. Determinați numerele naturale k și n care verifică relațiile:

$$\begin{cases}3^k+\log_3(k+1)=5n\\3^n+\log_3(n+1)=5k\end{cases}$$

Roxandra Murea, Brăila

***Soluție*:** Scădem egalitățile și obținem $3^k+\log_3(k+1)+5k=3^n+\log_3(n+1)+5n$ (1)

Fie $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=3^x+\log_3(x+1)+5x$. Cum funcția este strict crescătoare, rezultă că este injectivă, deci din $f(k)=f(n)\Rightarrow k=n$.

Din ipoteză obținem $3^n+\log_3(n+1)=5n$.

Observăm că $n=0,n=1$ nu verifică ecuația și că $n=2$ e soluție

Pentru $n\geq 3\Rightarrow 3^n\geq 5n$, ceea ce se demonstrează prin inducție matematică, deci nu există alte soluții. Soluția sistemului este $(n,k)=(2,2)$.

2. Considerăm un număr real pozitiv fixat a. Arătați că toate numerele complexe $z \in \mathbb{C}^*$, cu proprietatea $\operatorname{Re} z \geq a$, verifică inegalitatea $\left|\frac{1}{z}-\frac{2}{a}\right| < \frac{2}{a}$.

Costel Cerchez, Brăila

***Soluție*:** Avem: $\left|\frac{1}{z}-\frac{2}{a}\right| < \frac{2}{a} \Leftrightarrow \left|\frac{a-2z}{za}\right| < \frac{2}{a} \Rightarrow \frac{|2z-a|}{a\cdot|z|} < \frac{2}{a} \Leftrightarrow |2z-a| < 2|z|$ ridicăm la pătrat.

$|2z-a|^2 < 4|z|^2 \Leftrightarrow (2z-a)\overline{(2z-a)} < 4\cdot z\cdot \bar{z} \Leftrightarrow (2z-a)(2\bar{z}-a) < 4z\cdot\bar{z} \Leftrightarrow\Leftrightarrow 4z\cdot\bar{z}-2a\bar{z}-2az+a^2 <$ $< 4z\cdot\bar{z}$ adică $a^2 < 2a(z+\bar{z})$. Atunci $a^2 < 4a \leq 4\operatorname{Re} z$, cum $a>0$ avem $a < 4\operatorname{Re} z$ adevărat pentru că $a < 4a \leq 4\operatorname{Re} z$. Așadar inegalitatea din concluzie este adevărată.

3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}$, n radicali. Să se determine un număr natural a pentru care $\frac{a_n}{6+a_{n-1}} < \frac{1}{a} < \frac{2-a_{n+1}}{2-a_n}$, oricare ar fi $n \geq 2$.

Marian Ciorăscu, Brăila

***Soluție*:** Se demonstrează prin inducție matematică $\sqrt{2} \leq a_n < a_{n+1} < 2$ oricare ar fi $n \geq 2$.

$a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$ și $(a_n-2)^2 > 0 \Leftrightarrow a_n^2 - 4a_n + 4 > 0 \Leftrightarrow 2+a_{n-1}-4a_n+4 > 0 \Leftrightarrow 6+a_{n-1} > 4a_n$

Din $6+a_{n-1} > 4a_n \Rightarrow \frac{a_n}{6+a_{n-1}} < \frac{1}{4}$ și din $(a_{n+1}-2)^2 > 0 \Rightarrow 8-4a_{n+1} > 4-a_{n+1}^2$ iar din $a_{n+1} < 2$

$\Rightarrow \frac{2-a_{n+1}}{4-a_{n+1}^2} > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2-a_{n+1}}{2-a_n} > \frac{1}{4}$. Deci $\frac{a_n}{6+a_{n-1}} < \frac{1}{4} < \frac{2-a_{n+1}}{2-a_n} \Rightarrow a = 4.$

4. Să se determine valorile parametrului real $a > 0$, $a \neq 1$ pentru care suma soluțiilor ecuației $\log_a x \cdot \log_{a^2} x + \log_{a^2} x \cdot \log_{a^3} x + ... + \log_{a^n} x \cdot \log_{a^{n+1}} x = \frac{4n}{n+1}$ este $9,(1)$, unde $n \geq 3$ este număr natural.

Marian Ciorăscu, Brăila

***Soluție*:** Din condițiile de existență $x > 0$.

Pentru $x = 1 \Rightarrow \log_{a^{k+1}} 1 = 0$, oricare ar fi $a \in (0,\infty)\setminus\{1\} \Rightarrow x = 1$ nu este soluție a ecuației date

Pentru $x \in (0,\infty)\setminus\{1\}$

$$\frac{\log_a^2 x}{1\cdot 2} + \frac{\log_a^2 x}{2\cdot 3} + ... + \frac{\log_a^2 x}{n\cdot(n+1)} = \frac{4n}{n+1} \Rightarrow \log_a^2 x \cdot \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... \frac{1}{n(n+1)}\right) = \frac{4n}{n+1}$$

$$\log_a^2 x \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{4n}{n+1} \Rightarrow \log_a^2 x = 4 \Rightarrow x_1 = a^2, x_2 = \frac{1}{a^2} \in (0,\infty)\setminus\{1\}, \text{ oricare ar fi } a \in (0,\infty)\setminus\{1\}.$$

$x_1+x_2=9,(1)\Rightarrow a^2+\frac{1}{a^2}=\frac{82}{9}\Rightarrow\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=\frac{100}{9}\Rightarrow a+\frac{1}{a}=\pm\frac{10}{3}$ din care convine doar $a+\frac{1}{a}=\frac{10}{3}$

$\Rightarrow 3a^2-10a+3=0\ \Rightarrow a\in\left\{\frac{1}{3},3\right\}$.

CLASA A XI-A

1. Rezolvaţi în mulţimea $M_2(R)$ ecuaţia $X^3=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 4 & 17\end{pmatrix}$.

Gazeta Matematică nr.12/2017

Soluție: $\det(X^3)=17-16=1=(\det X)^3\Rightarrow\det X=1.$ Aplicăm teorema lui Cayley-Hamilton

$X^2=(TrX)X-(\det X)I_2\Rightarrow X^3=(TrX)X^2-X\Rightarrow Tr(X^3)=(TrX)(TrX^2)-Tr(X),$

$18=(TrX)\cdot((TrX)^2-2\det X)-TrX,\ TrX=t,\ t^3-3t-18=0,\ t^3-3t^2+3t^2-9t+6t-18=0,$

$t^2(t-3)+3t(t-3)+6(t-3)=0,(t-3)(t^2+3t+6)=0.$ Dacă $t^2+3t+6=0\Rightarrow\Delta=9-24=-15<0,$

ecuaţia nu are soluţii reale,fals. Dacă $t-3=0\Rightarrow t=3,$

$$X^2=3X-I_2\Rightarrow X^3=3X^2-X=9X-3I_2-X=8X-3I_2\Rightarrow X=\frac{1}{8}(X^3+3I_2)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2}\end{pmatrix},$$

2. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=3}^{n}\frac{3k^2+10k+6}{2^k(k^4+4)}.$

George-Florin Șerban,Brăila

Soluție: $k^4+4=(k^2+2)^2-(2k)^2=(k^2+2k+2)(k^2-2k+2)=[(k+1)^2+1]\cdot[(k-1)^2+1],$

$$\frac{3k^2+10k+6}{2^k(k^4+4)}=\frac{4(k^2+2k+2)-(k^2-2k+2)}{2^k(k^2+2k+2)(k^2-2k+2)}=\frac{1}{2^{k-2}[(k-1)^2+1]}-\frac{1}{2^k[(k+1)^2+1]},$$

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{3k^2+10k+6}{2^k(k^4+4)}=\frac{1}{2(2^2+1)}-\frac{1}{2^3(4^2+1)}+\frac{1}{2^2(3^2+1)}-\frac{1}{2^4(5^2+1)}+\frac{1}{2^3(4^2+1)}-\frac{1}{2^5(6^2+1)}+...+$$

$$...+\frac{1}{2^{n-4}[(n-3)^2+1]}-\frac{1}{2^{n-2}[(n-1)^2+1]}+\frac{1}{2^{n-3}[(n-2)^2+1]}-\frac{1}{2^{n-1}(n^2+1)}+\frac{1}{2^{n-2}[(n-1)^2+1]}-\frac{1}{2^n[(n+1)^2+1]}$$

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{3k^2+10k+6}{2^k(k^4+4)}=\frac{1}{2(2^2+1)}+\frac{1}{2^2(3^2+1)}-\frac{1}{2^{n-1}(n^2+1)}-\frac{1}{2^n[(n+1)^2+1]},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=3}^{n}\frac{3k^2+10k+6}{2^k(k^4+4)}=\frac{1}{10}+\frac{1}{40}=\frac{1}{8}.$$

3. Fie şirul $(a_n)_{n\geq1}$ cu $a_1>0$ şi $a_{n+1}=a_n+\frac{9}{2a_n},(\forall)n\in N^*.$ Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n+9}}.$

Supliment Gazeta Matematică nr. 9/2022

***Soluție*:**

Demonstrăm prin inducţie matematică propoziţia $P(n): a_n > 0, (\forall) n \in N^*$. $P(1): a_1 > 0,$ adevărat.Presupunem că $P(k)$ adevărat şi demonstrăm că $P(k+1)$ adevărat.

$P(k+1): a_{k+1} = \dfrac{2a_k^2+9}{2a_k} > 0,$ adevărat,deci $P(n): a_n > 0,$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*.$

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{9}{2a_n} > 0, (\forall) n \in N^*$ rezultă că şirul a_n este strict crescător,deci strict monoton şi are limită la infinit. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R},$ trecând la limită în relaţia de recurenţă obţinem, $a = a + \dfrac{9}{2a}$ rezultă $\dfrac{9}{2a} = 0,$ fals,deoarece $9 \neq 0,$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty.$

Aplicăm criteriul lui Cesaro-Stolz, $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n+9}} > 0,$ şirul de termeni pozitivi $\sqrt{n+9}$ este strict crescător şi nemărginit superior.

$$l^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{n+9} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{n+10-n-9} = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{2a_n}(2a_n + \frac{9}{2a_n}) = \lim_{n\to\infty} (9 + \frac{81}{4a_n^2}) = 9,$$

$l^2 = 9$ rezultă $l \in \{-3, 3\}$, dar $l > 0$ rezultă $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n+9}} = 3.$

4. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$, cu $A^{14} = I_n$. Arătați că matricea $A^4 - A^2 + I_n$ este inversabilă.

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

***Soluție*:** $A^2 = B \Rightarrow B^7 = I_n \Rightarrow B^8 = B$

$$I_n = B^8 - B + I_n = B^2\left(B^6 - I_n\right) + B^2 - B + I_n = B^2\left(B^3 - I_n\right)\left(B^3 + I_n\right) + \left(B^2 - B + I_n\right) =$$

$$= B^2\left(B^3 - I_n\right)\left(B + I_n\right)\left(B^2 - B + I_n\right) + \left(B^2 - B + I_n\right) = \left(B^2 - B + I_n\right)\left[\left(B^5 - B^2\right)\left(B + I_n\right) + I_n\right] =$$

$= \left(B^2 - B + I_n\right)\left(B^6 + B^5 - B^3 - B^2 + I_n\right) \Rightarrow B^2 - B + I_n$ este inversabilă rezultă $A^4 - A^2 + I_n$ este inversabilă; inversa este matricea $A^{12} + A^{10} - A^6 - A^4 + I_n$.

Observație: Matricea $A = I_n\left(\cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}\right)$ verifică $A^{14} = I_n$ și $A \neq I_n$.

CLASA A XII-A

1. Pe mulţimea $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ se defineşte operaţia $(a,b)*(c,d) = (ac + 5bd, ad + bc)$. Se consideră mulţimea $S = \left\{(u,v) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \middle| u^2 - 5v^2 = 1\right\}$.

a) Calculaţi $\underbrace{(9,4)*(9,4)*...*(9,4)}_{n\ \text{ori}}, n \geq 1.$

b) Arătaţi că S are o infinitate de elemente.

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

***Soluţie*:**

a) Notăm $(a_n,b_n)=\underbrace{(9,4)*(9,4)*...*(9,4)}_{n\ \text{ori}}, n\geq 1 \Rightarrow (9,4)*(a_n,b_n)=(9a_n+20b_n,9b_n+4a_n)\Rightarrow$

$$a_{n+1}=9a_n+20b_n \Rightarrow b_n=\frac{a_{n+1}-9a_n}{20},\ b_{n+1}=9b_n+4a_n \Rightarrow \frac{a_{n+2}-9a_{n+1}}{20}=9\frac{a_{n+1}-9a_n}{20}+4a_n \Rightarrow$$

$$a_{n+2}-9a_{n+1}=9a_{n+1}-81a_n+80a_n \Rightarrow a_{n+2}-18a_{n+1}+a_n=0 \Rightarrow t^2-18t+1=0,\ \Delta=320 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{18\pm 8\sqrt{5}}{2}=9\pm 4\sqrt{5} \Rightarrow a_n=c_1\left(9+4\sqrt{5}\right)^n+c_2\left(9-4\sqrt{5}\right)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9=a_1=c_1\left(9+4\sqrt{5}\right)+c_2\left(9-4\sqrt{5}\right), \\ 161=a_2=c_1\left(9+4\sqrt{5}\right)^2+c_2\left(9-4\sqrt{5}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow c_1=c_2=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a_n=\frac{1}{2}\left[\left(9+4\sqrt{5}\right)^n+\left(9-4\sqrt{5}\right)^n\right] \\ b_n=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\left(9+4\sqrt{5}\right)^n-\left(9-4\sqrt{5}\right)^n\right] \end{cases}$$

b)$(9,4)\in S$;demonstrăm că dacă $(a,b),(c,d)\in S \Rightarrow (a,b)*(c,d)\in S;(ac+5bd)^2-5(ad+bc)^2=(a^2-5b^2)$ $(c^2-5d^2)=1 \Rightarrow \underbrace{(9,4)*(9,4)*...*(9,4)}_{n\ \text{ori}}\in S.(9,4)*(a_n,b_n)=(9a_n+20b_n,9b_n+4a_n)\Rightarrow$

$a_{n+1}=9a_n+20b_n>a_n \Rightarrow b_{n+1}=9b_n+4a_n>b_n \Rightarrow S$ are o infinitate de elemente distincte.

2. Fie funcţia $f:(-1,1)\to R,\ f(x)=\dfrac{\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{x}{1-x^2}$. Dacă funcţia F este o primitivă a funcţiei f, iar funcţia F_1 este o primitivă a funcţiei F și $F(0)=F_1(0)=0$, determinați funcția F_1.

George-Florin Șerban, Brăila

***Soluție*:** $$\left(\frac{x\cdot arcsinx}{\sqrt{1-x^2}}\right)'=\frac{(\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})\sqrt{1-x^2}-(x\cdot arcinx)\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2},$$

$$\left(\frac{x\cdot arcinx}{\sqrt{1-x^2}}\right)'=\frac{\left(\arcsin x\right)\cdot\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)+x}{1-x^2}=\frac{\arcsin x}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{1-x^2}=f(x),\ \text{rezultă}$$

$$F(x)=\frac{x\cdot arcinx}{\sqrt{1-x^2}}+c,\ F(0)=c=0,\ F(x)=\frac{x\cdot arcinx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\int\frac{x\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int\left(\sqrt{1-x^2}\right)'\arcsin x\,\mathrm{dx}=-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\int\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

$$\int \frac{x\cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\int dx=-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+x+c_1=\mathrm{F}_1(x),\ F_1(0)=0=c_1,$$

$$\mathrm{F}_1(\mathrm{x})=-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+x.$$

3. Calculați $\int\limits_0^{\pi}\frac{x\cdot\sin x}{8+\sin^2 x}dx.$

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

***Soluţie*:** $y=\pi-x\Rightarrow dy=-dx; x=0\Rightarrow y=\pi; x=\pi\Rightarrow y=0$

$$I=\int\limits_0^{\pi}\frac{x\cdot\sin x}{8+\sin^2 x}dx=-\int\limits_{\pi}^{0}\frac{(\pi-y)\cdot\sin(\pi-y)}{8+\sin^2(\pi-y)}dy=\int\limits_0^{\pi}\frac{(\pi-y)\cdot\sin y}{8+\sin^2 y}dy=\pi\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin y}{8+\sin^2 y}dy-$$

$$-\int\limits_0^{\pi}\frac{y\cdot\sin y}{8+\sin^2 y}dy\Rightarrow 2I=\pi\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin y}{8+\sin^2 y}dy\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin y}{9-\cos^2 y}dy.$$

$\cos y=t\Rightarrow \sin y\,dy=-dt; y=0\Rightarrow t=1; y=\pi\Rightarrow t=-1.$

$$I=-\frac{\pi}{2}\int\limits_1^{-1}\frac{dt}{9-t^2}dt=-\frac{\pi}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dt}{t^2-9}dt=-\frac{\pi}{2\cdot2\cdot3}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|\Bigg|_{-1}^{1}=-\frac{\pi}{12}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln 2\right)=\frac{\pi}{6}\ln 2.$$

4. Fie $(G,\cdot)$ un grup necomutativ și $Z(G)=\{x\in G \mid xy=yx,\ \text{oricare ar fi } y\in G\}$, centrul său. Dacă a și b sunt două elemente din G cu proprietatea că $acb=bca$, pentru orice $c\in G\setminus Z(G)$ demonstrați că $ab=ba$.

Gazeta Matematică

***Soluţie*:** 1. Dacă $a^{-1}b^{-1}\notin Z(G)$, pentru $c=a^{-1}b^{-1}$, din ipoteză avem că $a\left(a^{-1}b^{-1}\right)b=b\left(a^{-1}b^{-1}\right)a$, adică $e=ba^{-1}b^{-1}a$. Deducem că $b^{-1}a^{-1}=a^{-1}b^{-1}\Rightarrow ab=ba.$

2. Dacă $a^{-1}b^{-1}\in Z(G)\Rightarrow\left(a^{-1}b^{-1}\right)b=b\left(a^{-1}b^{-1}\right)\Rightarrow a^{-1}=ba^{-1}b^{-1}.$ Atunci

$a=\left(ba^{-1}b^{-1}\right)^{-1}=\left(b^{-1}\right)^{-1}\left(a^{-1}\right)^{-1}b^{-1}=bab^{-1}$, deci $ab=\left(bab^{-1}\right)b=ba.$

PRIMAR

1. Determinaţi pentru ce valoare a lui a următoarea egalitate este adevărată:

$$\left[3+\left(a+47\right):9\right]\times 2=32$$

2. Ana are în penar 14 rechizite: creioane, stilouri şi pixuri. Ştiind că numărul stilourilor este un sfert din numărul creioanelor, iar numărul pixurilor este jumătate din numărul creioanelor,aflaţi câte creioane, câte pixuri şi câte stilouri are Ana.

3. Un jucător de şah are la dispoziţie 5 zile de pregătire pentru o competiţie. El se antrenează jucând cel puţin o partidă pe zi, dar nu mai mult de 14 partide în total. Arătaţi că există cel puţin 2 zile în care joacă acelaşi număr de partide.Justificaţi răspunsul.

4. Determinaţi pentru ce valoare a lui a următoarea egalitate este adevărată:

$$\left[\left(4+16\times 6\right):5+a\right]:13=10$$

5. Un biciclist parcurge un traseu. În prima zi parcurge jumătate din traseu, a doua zi un sfert din traseu, iar în a treia zi restul de 7 km.Ce lungime are traseul?

6. La o tabără internaţională de matematică participă 50 de copii din România şi din străinătate. Dintre aceştia, 23 de copii sunt din străinătate şi 12 fete sunt din străinătate. Ştiind că sunt 26 de fete în total, aflaţi câţi băieţi sunt din România. Justificaţi răspunsul.

7. Determinaţi pentru ce valoare a lui a următoarea egalitate este adevărată:

$$\left[\left(a+720:8\right)\times 2+130\right]\times 3=990$$

8. Într-o grădină avem 105 flori: lalele, narcise şi zambile. Numărul narciselor este de 2 ori mai mare numărul lalelelor, numărul narciselor este jumătate din numărul zambilelor. Aflaţi numărul lalelelor, numărul narciselor şi numărul zambilelor.

9. Într-o cutie avem bomboane albe, roşii şi verzi. Se ştie că 30 de bomboane nu sunt verzi, 20 de bomboane nu sunt roşii şi 18 bomboane nu sunt albe. Câte bomboane avem din fiecare culoare?

10. La Concursul "Mașina Anului" 2016, Opel Corsa a acumulat într-o zi un numărdublu de voturi față de triplul numărului de voturi pe care l-a obținut Ford Fiesta. Dacă Opel ar fi avut cu 1810 voturi mai puțin și Ford cu 280 mai puțin, atunci cele două mărci ar fi obținut un număr egal de voturi în acea zi. Câte voturi au obținut cele două mărci de mașini în ziua aceea?

11. Ioana are patru rochițe de culori diferite: roșu, alb, albastru, verde, pe care vrea să le poarte în excursia de la București. În prima zi va purta o rochie cu dantelă. A doua zi, rochia roșie sau rochia albă. În a treia zi, va purta o rochiță din catifea, potrivită pentru plimbarea în Cişmigiu. În ziua a patra, nici roșie, nici albă. Rochițele albă și albastră nu au dantelă iar rochiile verde și roșie nu sunt din catifea. De asemenea, Ioana nu va lua rochia albă în Cişmigiu. În ce ordine a îmbrăcat fetița cele patru rochii, având în vedere că în fiecare zi a avut ținute diferite? Justificați răspunsul.

12. Andrei a strâns o sumă de bani. Bunica îi mai dă de 4 ori mai mult decât are Andrei şi mama îi mai dă 200 de lei. Acum Andrei are 700 de lei. Aflaţi suma de bani pe care o avea Andrei la început.

13. Fie 10 bile colorate cu câte o culoare. Arătaţi că există 4 bile colorate la fel sau 4 bile de culori diferite.

14. Aflați x din egalitatea:

$$\left[420-2\cdot45:\left(37-7x\right)\right]:\left(4\cdot4-1\right)=25.$$

15. Într-o cutie sunt 25 bile albe, 25 bile negre şi 25 bile verzi. Care este numărul cel mai mic de bile care trebuie scoase, fără a privi bilele, pentru a fi siguri că am extras 13 bile de aceeaşi culoare?

16. Diferenţa a două numere naturale este cu 240 mai mică decât suma lor şi de 4 ori mai mică decât aceeaşi sumă. Aflaţi numerele.

17. Suma a trei numere este 100. Să se afle numerele ştiind că primul număr este de 3 ori mai mic decât al doilea şi al treilea împreună, iar diferenţa dintre al treilea şi al doilea este jumătate din al doilea.

18. Într-o şcoală sunt 25 de clase. În fiecare clasă sunt cel puţin 30 de elevi şi cel mult 35 de elevi. Arătaţi că există cel puţin 5 clase cu acelaşi număr de elevi.

19. Trei ciobani au 1997 oi. Al doilea are cu 8 oi mai mult decât primul, iar al treilea dublul numărului de oi al primului cioban micşorat cu 15. Câte oi are fiecare?

CLASA a V a

1. Fie numărul natural $n \geq 10$ astfel încât $13n+8$ dă restul 13 la împărţirea cu 80, iar $8n+5$ dă restul 5 la împărţirea cu 50. Determinaţi penultima cifră a numarului n.

Daniela și Nicolae Stănică, Brăila

2. Considerăm 5 numere naturale consecutive. Daca suma a patru numere dintre ele este $2014^n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, atunci aratati ca produsul celor patru numere este divizibil cu 4.

Daniela și Nicolae Stănică, Brăila

3. Considerăm numerele naturale prime *x, y, z* care verifică relaţia: $x + 2y + 4z = 28$ şi numărul $A\,(a, b, c) = a^x \cdot b^y \cdot c^z$; $a, b, c \in \mathbb{N}^*$.

a) Stabiliţi în câte cifre de zero se termină numărul $A(625, 7, 4)$.

b) Determinaţi cel mai mic număr natural *a*, astfel încât $A(a, 7, 1)$ să fie divizibil cu 2023.

Ciprian Dobraniș, Brăila

4. Aflaţi toate numerele de forma $\overline{abcd}$ care verifică relaţia $\overline{abc} + 7 \cdot \overline{dbc} + 5 \cdot \overline{cad} = 2021$.

George-Florin Şerban, Brăila

5. Determinați cate numere de forma $\overline{abcd}$ satisfac simultan conditiile:

1) $\overline{ab} - \overline{ba}$ este patrat perfect

2) $c^3 + c = 10 \cdot d$

Tilincă Daniela, Brăila

6. Aflați numerele naturale nenule *n* cu proprietățile: împărțind *n* la 17 obținem câtul egal cu restul împărțirii lui *n* la 19 și împărțind *n* la 19 obținem câtul egal cu împărțirii lui *n* la 17.

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

7. Reconstituiți egalitatea: $\overline{MICII} + \overline{BALCESTI} = 98.778.054$, unde literelor distincte le corespund cifre distincte.

Valentin Florin Damian, Brăila

8. Determinați numerele naturale x, y și z, știind că

$$2^{2x} \cdot \left(1 + \frac{1}{2^x}\right) + 2^y \cdot \left(2^{3^y - y} + 1\right) + 2^{2^z} + 2^{yz} \cdot 3 = 2020.$$

9. Determinați numerele naturale x și y care verifică egalitatea $(x+48)(x+112) = \dfrac{2^y}{x^2 + 16x}$.

Adelina Ion, Brăila

10. George și Ioana sunt frați. Calculați câți bunici au avut bunicii părinților bunicilor părinților celor doi frați, știind că nu există alte rude printre toate aceste persoane. Aceeași problemă dacă exact doi străbunici ai lui George sunt veri primari.

Valentin Florin Damian, Brăil

CLASA a VI a

1. Să se demonstreze că $(1^{2021}+2^{2021}+3^{2021}+...+2024^{2021}) \vdots 11$.

George-Florin Şerban, Brăila

2. Determinați numerele naturale $x,\ y$ care verifică relația: $49^{x}+81^{y}=4\cdot7^{x}\cdot9^{y}$.

Adela Dimov, Brăila

3. În interiorul unghiului obtuz $A\widehat{O}B$ se construiesc semidreptele [*OM*, [*Ox*, [*Oy*, astfel încât *OM* $\perp$ *OA*, [*Ox* = bisectoarea unghiului $A\widehat{O}M$ şi [*Oy* bisectoarea unghiului $X\widehat{O}B$. Ştiind că măsura unghiului $M\widehat{O}Y$ este $12°30'$, să se determine măsura unghiului $A\widehat{O}B$.

Ciprian Dobraniș, Brăila

4. Determinați cifrele a,b,c,d stiind ca are loc egalitatea :

$$\overline{abcd}=(2a-b+c-d)^{8}-(2a-b+c-d)^{6}-1$$

Simona Slobodeanu, Brăila

5. În interiorul unghiului $\sphericalangle AOC$ se ia punctul *B*, astfel încât $\sphericalangle AOC=50^{\circ}$, $\sphericalangle AOB=20^{\circ}$. Fie $(OM$ bisectoarea $\sphericalangle BOC$ și $(ON$ bisectoarea $\sphericalangle A'OC$, unde $(OA'$ este semidreapta opusă lui $(OA$. Aflați măsura unghiului $\sphericalangle MON'$, unde $(ON'$ este semidreapta opusă lui $(ON$.

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

6. Se dau unghiurile $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD, \sphericalangle DOA$ unghiuri in jurul unui punct cu interioarele disjuncte astfel încât $\sphericalangle AOB=a\cdot(\sphericalangle BOC); \sphericalangle DOC)=b\cdot(\sphericalangle BOC); \sphericalangle DOA=c\cdot(\sphericalangle AOB\ )$unde $a,b,c\in Q^{*}$ verifică relatiile $a\cdot b=0,3; b\cdot c=0,(3); c\cdot a=0,4.$

a) Determinaţi măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD, \sphericalangle DOA$

b) Determinați măsura unghiului dintre bisectoarea unghiului *AOD* şi semidreapta opusă semidreptei [*OB*.

Daniela Tilincă, Brăila

7. Să se arate că $2020^{n}-25^{n}-(-4)^{n}+361^{n}$ se divide cu 40, pentru orice număr natural n.

Adelina Ion, Brăila

8. Fie M mulţimea multiplilor lui 36 în a căror scriere (în baza 10) nu apar alte cifre decât 4, 6 sau 9. Câte numere cel mult egale cu 100 000 conţine M ?

Gabriel Popa, Iaşi

CLASA a VII a

1. Determinaţi numerele reale *a* şi *b*, ştiind că $\max\left\{a^2+b+\frac{1}{4};b^2+a+\frac{1}{4}\right\}\le 0$.

Ciprian Dobraniș, Brăila

2. În triunghiul ABC dreptunghic în A, se duce înălțimea AD, $D\in BC$. Din D, construim $DE\perp AC$ ($E\in AC$), $DF\perp AB$ ($F\in AB$), $EH\perp BC$ și $FG\perp BC$. Fie G_1 simetricul lui G față de AB și H_1 simetricul lui H față de AC iar $HH_1\cap GG_1=\{M\}$.

Demonstrați că: a) $\triangle MG_1H_1\sim\triangle ABC$; b) În ce caz $\triangle MG_1H_1\equiv\triangle ABC$?

Adela Dimov, Brăila

3. Determinați numerele naturale de forma $\overline{abc}$ astfel încât:

$$\frac{\overline{ab5}}{5-c}+\frac{\overline{a7c}}{70-10b}+\frac{\overline{9bc}}{900-100a}=962,04$$

Daniela și Nicolae Stănică, Brăila

4. Fie $ABCD$ un patrulater convex $M\in(AB),N\in(BC),P\in(CD),Q\in(AD)$ astfel încât

$$\frac{MA}{MB}=\frac{NB}{NC}=\frac{PD}{PC}=\frac{QA}{QD}=k>0.$$

Dacă $QN+MP=\frac{k(DC+CB)+(AB+AD)}{k+1}$ atunci $ABCD$ este paralelogram.

Gheorghe Alexe și George-Florin Serban, Brăila

5. Fie $\triangle ABC$ ascuțitunghic cu $\sphericalangle A=60°$, $BB'\perp AC,CC'\perp AB,C'\in AB,B'\in AC.$ Demonstrați că $B'C'=\frac{BC}{2}.$

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

6. Să se determine $x,y,z\in\mathbb{N}^*$ care verifică egalitatea $x^2+2y^2=2465+10^z$.

Gabriel Daniilescu, Brăila

7. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia $x^2+y^2+xy(x-y)=2021$. Calculaţi $x+y$.

George Florin Şerban, Brăila

CLASA a VIII a

1. Demonstrați inegalitatea, $-\frac{1}{26}\le\frac{x}{x^2+169a^2}\le\frac{1}{26}, a>0$.

Simona Slobodeanu, Brăila

2. Aflaţi $n\in\mathbb{N}^*$ cu proprietatea că: $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{3}\right]+...\left[\sqrt{n^2+2n}\right]=671\cdot1007\cdot8057$.

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

3. a) Arătaţi că segmentele care unesc un vârf al unui tetraedru cu centrul de greutate al feței opuse sunt concurente într-un punct *G* numit centrul de greutate al tetraedrului.

b) Fie *G* un punct arbitrar situat în interiorul unui unghi triedru determinat de semidreptele $[OA, [OB, [OC$. Să se arate că există punctele $M\in[OA, N\in[OB, P\in[OC$ astfel încât G să fie centrul de greutate al tetraedrului $[OMNP]$.

Gabriel Daniilescu, Brăila

4. Fie $[ABCDA_1B_1C_1D_1]$ un cub, T mijlocul segmentului $[CC_1]$ iar M mijlocul segmentului $[BC]$.

a) Arătaţi că dreptele AM şi D_1T sunt coplanare.

b) Arătaţi că $[D_1TMA]$ este un patrulater inscriptibil .

c) Calculaţi raportul dintre aria patrulaterului $[D_1TMA]$ şi aria triunghiului D_1AC.

Daniela Tilincă și Adriana Mihăilă, Brăila

5. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia:

$$(7-x)\left(2\sqrt{6}-5\right)=x^2\sqrt{x^2+49-14x}.$$

Daniela Tilincă și Adriana Mihăilă, Brăila

6. Considerăm numerele reale pozitive *a, b, c,* care verifică următoarele condiții:

$a^4-7a^2+1=0, b^4-23b^2+1=0, c^4-14c^2+1=0$. Demonstrați că $a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=12$.

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

7. Considerăm expresia $E\left(x,n\right)=x^{2^n}-2^n$, unde $x\in\left(0,\infty\right)$ și $n\in\mathbb{Z}$.

a) Verificați că 7^8+4 este divizibil cu 461.
b) Câți divizori întregi are numărul $E\left(7,4\right)$?
c) Arătați că, pentru orice $k\geq 3$, numărul $E\left(\sqrt{2},2k\right)$ are cel puțin 28 de divizori.

Valentin Florin Damian, Brăila

8. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic. Notăm cu M, N, P centrele fețelor $ABCD$, $BCC'B'$, respectiv $ABB'A'$. De asemenea, notăm cu s aria triunghiului MNP și cu S aria totală a paralelipipedului $ABCDA'B'C'D'$. Dacă $\dfrac{S}{s}=16\sqrt{3}$, demonstrați că paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

Prof. Marius Damian, Brăila

CLASA a IX a

1. Determinați numerele reale x,y, dacă: $3\left(x^4-3x^2+y^2-2x-6y+14\right)\leq\left(x+x^2+y-6\right)^2$.

Adela Dimov, Brăila

2. Calculați măsurile unghiurilor triunghiului ΔABC știind că verifică simultan condițiile: i)$\left(\dfrac{tgB+tgC}{2}\right)^2\left(\dfrac{tg^2B+tg^2C}{2}\right)^5=\left(tgB\cdot tgC\right)^6$. ii) ΔABC nu este obtuzunghic. iii)Dacă punctul $D\in[BC]$ este mijlocul segmentului $[BC]$, $d\left(D,AB\right)=\dfrac{AB}{4}$ și $BD<AD$.

George-Florin Şerban, Brăila

3. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația

$$\frac{1201x^2+799x+15578}{x^2+x+20}+\frac{109x^2+71x+388}{x^2+x+6}+\frac{1729x^2+1151x+27046}{x^2+x+24}=2021.$$

George-Florin Şerban, Brăila

4. Aflaţi $x\in\mathbb{N}$ cu proprietatea că: $\dfrac{nx+\left[\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right]}{\left[\sqrt{4x+1}+4028\right]}+\dfrac{x}{\left[\sqrt{4x+2}\right]+4028}=1, n\in\mathbb{N},$ fixat.

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

5. Fie numerele $a_1, a_2, ..., a_n \in (0,\infty)$, astfel încât $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$. Demonstraţi inegalitatea:

$$\left(a_2\sqrt{a_1^2+a_4^2}+a_3\sqrt{a_2^2+a_5^2}+...+a_n\sqrt{a_{n-1}^2+a_2^2}+a_1\sqrt{a_n^2+a_3^2}\right)\left(\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+...+\frac{a_n}{a_1+a_2}\right)\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Adela Dimov, Brăila

6. a) Să se arate că ecuația $\frac{x^4+2023}{x^2}-\frac{x^2}{1+2023x^4}=89$ nu are soluții reale.

b) Determinați cel mai mic număr natural k cu proprietatea că ecuația

$$\left[\frac{x^4+2023}{x^2}\right]+\left[\frac{x^2}{1+2023x^4}\right]=k$$ are cel puțin o soluție reală.

Gabriel Daniilescu, Brăila

CLASA a X a

1. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația $(n+1)(n^2+1)(n^3+1)=(\mathrm{n}^2+\frac{n}{3}+1)^3$.

George-Florin Şerban, Brăila

2. Rezolvați ecuația: $x^6-63=\sqrt[8]{x-1}$.

Adela Dimov, Brăila

3. Fie z_1, z_2 două numere complexe care au același modul. Arătați că $2024|z_1+z_2|\leq 2|2023z_1+z_2|$.

Simona Slobodeanu, Brăila

4. Arătaţi că ecuaţia $(x-4)^{\log_4 5}=x-1+(2x-5)^{\log_5 4}, x>4$, are soluţie unică.

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

CLASA a XI a

1. Fie $A\in M_n(Z)$, care verifică relația $-2020A^3+2021A^4-2022I_2-2023A=O_n$. Demonstrați că

$$\left(\det\left(A^2+2023I_n\right)-2024\right)\vdots 2023.$$

George-Florin Șerban, Brăila

2. Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}, x_0=a\in\mathbb{R}, x_{n+1}=\frac{x_n}{x_n^2-x_n+1}, \forall n\in\mathbb{N}$. Demonstraţi că $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent. Calculaţi $\lim_{n\to\infty}x_n$.

Prof. Carmen şi Viorel Botea, Brăila

3. Fie $n,k\in\mathbb{N}^*$ şi $A,B\in M_k\left(\mathbb{C}\right)$, A inversabilă astfel încât $AB=B^{n+1}A$ şi $B\cdot B^2\cdot B^3\cdot\ldots\cdot B^{\ n}=I_k$.

a) Să se arate că $AB=BA$.

b) Pentru $n=2013,$ daţi exemplu de o matrice $B\neq I_k$ ccare verifică proprietăţile din enunţ pentru orice matrice $A\in M_k\left(\mathbb{C}\right)$.

Gabriel Daniilescu, Brăila

4. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3\ln\left(n+1\right)-\left(n+1\right)n^2\ln n}{\left(n+1\right)n\ln\left(n-1\right)}$.

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

5. Fie şirul $\left(a_n\right)_{n\geq0}$ definit astfel : $a_0=0, a_{n+1}=e^{a_n}+1, \forall n\in\mathbb{N}.$ Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln a_{n+1}}{a_n}$.

Prof. Carmen şi Viorel Botea, Brăila

CLASA a XII a

1. Arătaţi că

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{x\sqrt{x}}dx\leq\sqrt{\frac{\pi\left(4-\sqrt{3}\right)-2\sqrt{3}\ln 2}{12\sqrt{3}}}$$

Ciprian Dobraniș, Brăila

2. Fie $I_n=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\dfrac{x^{n-1}}{(x+1)^n}dx, n\geq1$. Calculați:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}nI_n$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{2^k}-\dfrac{1}{3^k}\right)$.

Nicolae Papacu, Slobozia

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie care admite primitive astfel încât $f\left(0\right)=1$ şi există o primitivă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a lui f care verifică relaţia $f\left(x\right)=2023\cdot F\left(x\right),\ \ \forall x\in\mathbb{R}$. Calculaţi $\int\dfrac{f\left(x\right)}{f^2\left(x\right)+2023}dx,\ x\in\mathbb{R}$.

Prof.Carmen şi Viorel Botea, Brăila

4. Fie $(G,\cdot)$ un grup abelian finit, $G=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ în care ecuaţia $t^3=e$ are soluţie unică, e fiind elementul neutru al grupului $(G,\cdot)$. Arătaţi că $\exists\, b_1,b_2,...,b_n \in G$ cu $b_1^3a_1=e,\ b_2^3a_2=e,...,b_n^3a_n=e$. Calculaţi $(a_1a_2...a_n)^4$.

Carmen şi Viorel Botea, Brăila

5. Pe $M=(0,\infty)$ se defineşte o lege de compoziţie astfel încât $x\cdot\left(\frac{1}{x}*y\right)=\frac{2}{x}\cdot(x*2y)$ şi $(x*y)(x*16y)=\left(\frac{x^2+1}{4y}\right)^2$, oricare ar fi $x,y\in M$. Studiaţi asociativitatea, comutativitatea şi existenţa elementului neutru şi apoi să se calculeze $7*50$.

Gabriel Daniilescu, Brăila

6. Pe mulţimea $M=(0;\infty)$ se defineşte o lege de compoziţie "$*$" astfel încât

$$x*\frac{1}{y}=y(x*y),\, x*\frac{9}{y}=\frac{y}{3}(x*y) \text{ şi } (x*y)(x*81y)=\frac{(x+1)^2}{36xy}, \text{ oricare ar fi } x,y\in M.$$

a) Studiaţi asociativitatea, comutativitatea şi existenţa elementului neutru pentru operaţia "$*$".

b) Demonstraţi că nu există $x\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $x*81\in\mathbb{N}^*$.

Gabriel Daniilescu, Brăila

SIMULARE MATEMATICĂ EVALUARE NAȚIONALĂ

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Rezultatul calculului $5^2-64\cdot(10-20:2)$ este egal cu :

a) 5 **b)** 64 **c)** 25 **d)** 10

5p **2.** Știind că $\frac{a}{4}=\frac{5}{b}, b\neq 0$, atunci rezultatul calculului $ab-20$ este egal cu:

a) 20 **b)** 0 **c)** 1 **d)** 9

5p **3.** Inversul numărului $\frac{\sqrt{3}}{3}$ este numărul:

a) 3 **b)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **c)** $\sqrt{3}$ **d)** $3\sqrt{3}$

5p **4.** Suma numerelor naturale din intervalul $[-2,2]$ este egală cu :

a) -2 **b)** 2 **c)** 0 **d)** 3

5p **5.** Patru elevi au calculat media aritmetică a numerelor $a=12+3\sqrt{12}$ și $b=6\left(2-\sqrt{3}\right)$

.Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos.

Denis	Violeta	David	Rebeca
24	36	6	12

Dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect media aritmetică este:

a) Denis **b)** Violeta **c)** David **d)** Rebeca

5p **6.** Elevii unei clase au obținut la un test notele prezentate în tabelul de mai jos:

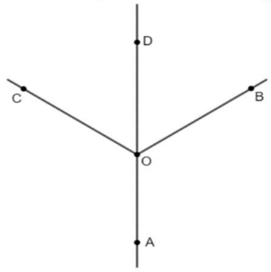
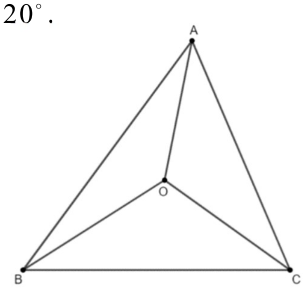
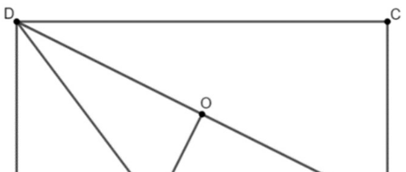
Nota	4	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	1	1	5	7	6	2	2

Răzvan afirmă că „media notelor obținute de elevii clasei este egală cu 7,30”. Afirmația făcută este:

a) Adevărată **b)** Falsă

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** În figura alăturată, A, B, C sunt puncte coliniare, în această ordine, astfel încât M și N sunt mijloacele segmentelor AB respectiv BC, $AM = 2$ cm și $BC = 6$ cm. Lungimea segmentului MN este egală cu: **a)** 5 cm **b)** 2 cm **c)** 3 cm **d)** 4 cm 
5p	**2.** În figura alăturată AOB, BOC și COA sunt unghiuri congruente în jurul punctului O, iar semidreapta OD este bisectoarea unghiului BOC. Măsura complementului unghiului BOD este egală cu: **a)** 45° **b)** 30° **c)** 60° **d)** 90° 
5p	**3.** În figura alăturată punctul O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, măsura unghiului AOC este de 130° și măsura unghiului BOC este de 120°. Măsura unghiului ACB este egală cu: **a)** 45° **b)** 60° **c)** 65° **d)** 55° 
5p	**4.** În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$. Punctul O este mijlocul diagonalei BD, iar punctul M se află pe latura AB, astfel încât dreptele OM și BD sunt perpendiculare. Dacă $MD = 4$ cm și $BC = \sqrt{7}$ cm, atunci lungimea segmentului AB este egală cu: **a)** 3 cm **b)** 7 cm **c)** $3\sqrt{7}$ cm **d)** $2\sqrt{15}$ cm 

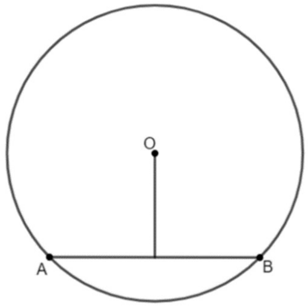
5p **5.** Punctele A și B sunt situate pe un cerc de centru O, astfel încât lungimea segmentului AB este de 16 cm și distanța de la centrul cercului la dreapta AB este de 6 cm. Lungimea acestui cerc este egală cu:

a) 50π cm

b) 20π cm

c) 16π cm

d) 10π cm



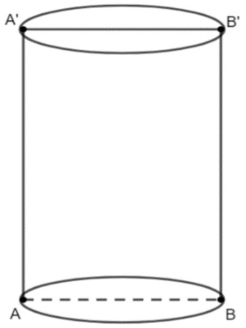
5p **6.** În figura alăturată este reprezentat un cilindru circular drept cu generatoarea $AA' = 12$ cm și segmentele AB și $A'B'$ sunt diametre ale bazelor cilindrului. Secțiunea axială $ABB'A'$ are perimetrul egal cu 36 cm. Aria laterală a acestui cilindru este egală cu:

a) 72π cm^2

b) 24π cm^2

c) 36π cm^2

d) 48π cm^2



SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 puncte)**

5p **1.** Numerele naturale $\overline{ab}$ și $\overline{bc}$, scrise în baza 10, sunt direct proporționale cu numerele 5 și respectiv 3.

(2p) a) Este posibil ca $b = 7$? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină toate numerele $\overline{ab}$ și $\overline{bc}$ care îndeplinesc condiția din enunț.

5p **2.** Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{1-x} + \frac{2}{x^2-1}\right) \cdot \frac{x+1}{2}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

(2p) a) Arată că $E(x) = \frac{x+1}{x-1}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

(3p) b) Determină numerele întregi a pentru care valoarea expresiei $E(a)$ este număr întreg .

3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 4$.

(2p) a) Arată că $f(1) - f(-1) = 4$.

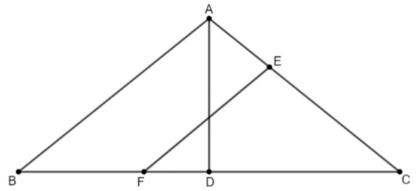
(3p) b) În sistemul de axe ortogonale xOy se consideră punctul $M(m,0)$ și punctele A și B

de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox respectiv Oy . Află valorile numărului m pentru care aria triunghiului ABM este egală cu 8.

4. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu $AB = AC = 15$ cm, $BC = 24$ cm, punctele E și F sunt situate pe segmentele AC și BC, astfel încât $AE = 5$ cm și $BF = 8$ cm. Punctul D este situat pe dreapta BC astfel încât $AD \perp BC$.

(2p) a) Arată că aria triunghiului ABC este egală cu 108 cm^2.

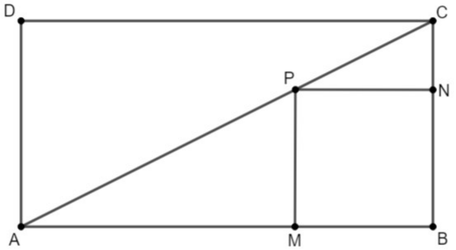
(3p) b) Știind că G este punctul de intersecție al dreptelor AD și EF , demonstrați că G estecentrul de greutate al triunghiului ABC .



5. În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$ cu $AD = 3$ cm și $AC = 5$ cm. Pe segmentele AB, BC și AC se consideră punctele M , N , respectiv P , astfel încât $MBNP$ este pătrat.

(2p) a) Arată că perimetrul dreptunghiului $ABCD$ este egal cu 14 cm.

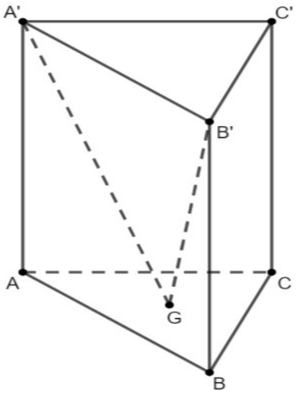
(3p) b) Demonstrează că lungimea segmentului MB este mai mică decât $\sqrt{3}$ cm.



6. În figura alăturată este reprezentată o prismă dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghiul echilateral ABC cu $AA' = AB = 6$ cm, iar punctul G este centrul de greutate al bazei ABC.

(2p) a) Arată că volumul prismei este egal cu $54\sqrt{3}$ cm^3 .

(3p) b) Calculează valoarea tangentei unghiului determinat de planele (ABC) și $(A'B'G)$.



SIMULARE MATEMATICĂ EVALUARE NAȚIONALĂ

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Rezultatul calculului $5^2-64\cdot\left(10-20:2\right)$ este egal cu :

a) 5 **b)** 64 **c)** 25 **d)** 10

5p **2.** Știind că $\frac{a}{4}=\frac{5}{b}, b\neq 0$, atunci rezultatul calculului $ab-20$ este egal cu:

a) 20 **b)** 0 **c)** 1 **d)** 9

5p **3.** Inversul numărului $\frac{\sqrt{3}}{3}$ este numărul:

a) 3 **b)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **c)** $\sqrt{3}$ **d)** $3\sqrt{3}$

5p **4.** Suma numerelor naturale din intervalul $\left[-2,2\right]$ este egală cu :

a) -2 **b)** 2 **c)** 0 **d)** 3

5p **5.** Patru elevi au calculat media aritmetică a numerelor $a=12+3\sqrt{12}$ și $b=6\left(2-\sqrt{3}\right)$

.Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos.

Denis	Violeta	David	Rebeca
24	36	6	12

Dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect media aritmetică este:

a) Denis **b)** Violeta **c)** David **d)** Rebeca

5p **6.** Elevii unei clase au obținut la un test notele prezentate în tabelul de mai jos:

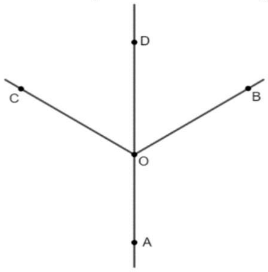
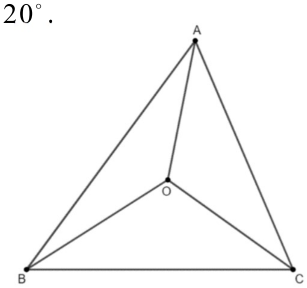
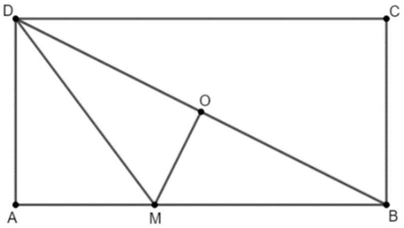
Nota	4	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	1	1	5	7	6	2	2

Răzvan afirmă că ,,media notelor obținute de elevii clasei este egală cu 7,30”. Afirmația făcută este:

a) Adevărată **b)** Falsă

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** În figura alăturată, A, B, C sunt puncte coliniare, în această ordine, astfel încât M și N sunt mijloacele segmentelor AB respectiv BC, $AM = 2$ cm și $BC = 6$ cm. Lungimea segmentului MN este egală cu: **a)** 5 cm **b)** 2 cm **c)** 3 cm **d)** 4 cm 
5p	**2.** În figura alăturată AOB, BOC și COA sunt unghiuri congruente în jurul punctului O, iar semidreapta OD este bisectoarea unghiului BOC. Măsura complementului unghiului BOD este egală cu: **a)** 45° **b)** 30° **c)** 60° **d)** 90° 
5p	**3.** În figura alăturată punctul O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, măsura unghiului AOC este de 130° și măsura unghiului BOC este de 120°. Măsura unghiului ACB este egală cu: **a)** 45° **b)** 60° **c)** 65° **d)** 55° 
5p	**4.** În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$. Punctul O este mijlocul diagonalei BD, iar punctul M se află pe latura AB, astfel încât dreptele OM și BD sunt perpendiculare. Dacă $MD = 4$ cm și $BC = \sqrt{7}$ cm, atunci lungimea segmentului AB este egală cu: **a)** 3 cm**b)** 7 cm**c)** $3\sqrt{7}$ cm**d)** $2\sqrt{15}$ cm 

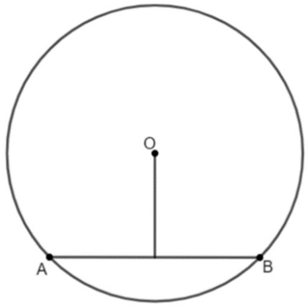
5p **5.** Punctele A și B sunt situate pe un cerc de centru O, astfel încât lungimea segmentului AB este de 16 cm și distanța de la centrul cercului la dreapta AB este de 6 cm. Lungimea acestui cerc este egală cu:

a) 50π cm

b) 20π cm

c) 16π cm

d) 10π cm



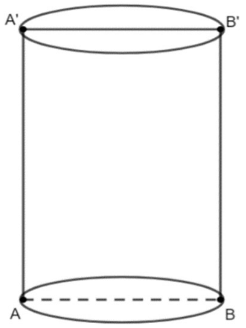
5p **6.** În figura alăturată este reprezentat un cilindru circular drept cu generatoarea $AA' = 12$ cm și segmentele AB și $A'B'$ sunt diametre ale bazelor cilindrului. Secțiunea axială $ABB'A'$ are perimetrul egal cu 36 cm. Aria laterală a acestui cilindru este egală cu:

a) 72π cm^2

b) 24π cm^2

c) 36π cm^2

d) 48π cm^2



SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 puncte)**

5p **1.** Numerele naturale $\overline{ab}$ și $\overline{bc}$, scrise în baza 10, sunt direct proporționale cu numerele 5 și respectiv 3.

(2p) a) Este posibil ca $b = 7$? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină toate numerele $\overline{ab}$ și $\overline{bc}$ care îndeplinesc condiția din enunț.

5p **2.** Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{1-x} + \frac{2}{x^2-1}\right) \cdot \frac{x+1}{2}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

(2p) a) Arată că $E(x) = \frac{x+1}{x-1}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

(3p) b) Determină numerele întregi a pentru care valoarea expresiei $E(a)$ este număr întreg .

3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 4$.

(2p) a) Arată că $f(1) - f(-1) = 4$.

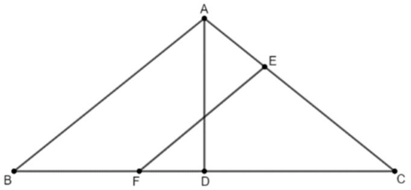
(3p) b) În sistemul de axe ortogonale xOy se consideră punctul $M(m,0)$ și punctele A și B

de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox respectiv Oy. Află valorile numărului m pentru care aria triunghiului ABM este egală cu 8.

4. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu $AB = AC = 15$ cm, $BC = 24$ cm, punctele E și F sunt situate pe segmentele AC și BC, astfel încât $AE = 5$ cm și $BF = 8$ cm. Punctul D este situat pe dreapta BC astfel încât $AD \perp BC$.

(2p) a) Arată că aria triunghiului ABC este egală cu 108 cm^2.

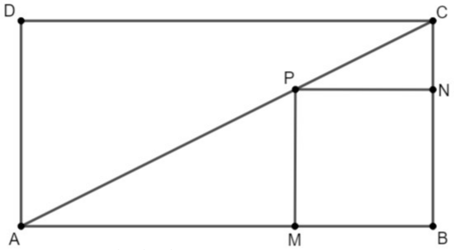
(3p) b) Știind că G este punctul de intersecție al dreptelor AD și EF, demonstrați că G estecentrul de greutate al triunghiului ABC.



5. În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$ cu $AD = 3$ cm și $AC = 5$ cm. Pe segmentele AB, BC și AC se consideră punctele M, N, respectiv P, astfel încât $MBNP$ este pătrat.

(2p) a) Arată că perimetrul dreptunghiului $ABCD$ este egal cu 14 cm.

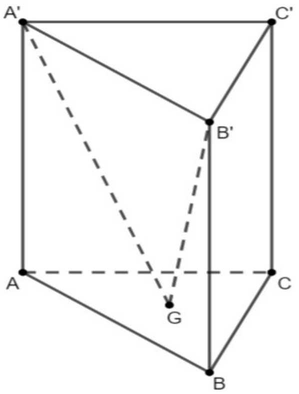
(3p) b) Demonstrează că lungimea segmentului MB este mai mică decât $\sqrt{3}$ cm.



6. În figura alăturată este reprezentată o prismă dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghiul echilateral ABC cu $AA' = AB = 6$ cm, iar punctul G este centrul de greutate al bazei ABC.

(2p) a) Arată că volumul prismei este egal cu $54\sqrt{3}\ \text{cm}^3$.

(3p) b) Calculează valoarea tangentei unghiului determinat de planele (ABC) și $(A'B'G)$.



BAREM

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**b)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**d)**	**5p**
5.	**d)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)**	**5p**
2.	**b)**	**5p**
3.	**d)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $3\overline{ab} = 5\overline{bc} \Rightarrow \overline{ab} \vdots 5$ deci b nu poate fi 7.	**1p** **1p**
	b) $3\overline{ab} = 5\overline{bc} \Rightarrow \overline{ab} \vdots 5 \Rightarrow b = 5$ $6a = 47 + c$ Perechile sunt $(95,57)$ și $(85,51)$	**1p** **1p** **1p**
2.	**a) a)** $E(x) = \frac{2x+2}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{x+1}{2} =$ $= \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{x+1}{2} = \frac{x+1}{x-1}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.	**1p** **1p**
	b) $E(a) \in \mathbb{Z},\ E(a) = \frac{a+1}{a-1} = 1 + \frac{2}{a-1}$ Cum $a-1 \in \mathbb{Z}$ și $\frac{2}{a-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a-1 \in \{-1,1,-2,2\}$ $a = -1$ care nu convine și $a \in \{0,2,3\}$	**1p** **1p** **1p**

3.	**a)** $f(1)=-2,\ f(-1)=-6\Rightarrow$ $\Rightarrow f(1)-f(-1)=-2-(-6)=4$	**1p** **1p**
	b) $A(2,0)$ și $B(0,-4)$ sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox respectiv Oy. $A_{\Delta ABM}=\frac{AM\cdot BO}{2}=8\Rightarrow AM=4$ $AM=\lvert m-2\rvert=4\Rightarrow m=6$ sau $m=-2$	**1p** **1p** **1p**
4.	**a)** Triunghiul ABD este dreptunghic în $D\Rightarrow AD^2+BD^2=AB^2\Rightarrow AD=9$ cm. $A_{\Delta ABC}=\frac{B\cdot h}{2}=\frac{24\cdot 9}{2}=108\,\text{cm}^2$.	**1p** **1p**
	b) $\frac{EC}{EA}=\frac{FC}{FB}=\frac{2}{1}\Rightarrow FE\parallel AB\Rightarrow FG\parallel AB\Rightarrow$ $\Rightarrow\frac{DG}{AG}=\frac{FD}{BF}=\frac{1}{2}$ AD este mediană $\Rightarrow G$ este centrul de greutate al ΔABC	**1p** **1p** **1p**
5.	**a)** ΔADC este dreptunghic în D, deci $DC^2+AD^2=AC^2\Rightarrow DC=\sqrt{16}=4$ $P_{ABCD}=2AB+2BC=2\cdot 4+2\cdot 3=14\,\text{cm}$	**1p** **1p**
	$PM\parallel BC\Rightarrow\frac{PM}{BC}=\frac{AP}{AC}, PN\parallel AB\Rightarrow\frac{PN}{AB}=\frac{PC}{AC}$ **b)** $\frac{PM}{BC}+\frac{PN}{AB}=\frac{AP+PC}{AC}=1\Rightarrow\frac{MB}{3}+\frac{MB}{4}=1$ $\Rightarrow MB\cdot\frac{7}{12}=1\Rightarrow MB=\frac{12}{7}<\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{144}<\sqrt{147}$	**1p** **1p** **1p**
6.	**a)** $V=A_B\cdot h=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\cdot h=$ $=\frac{6^2\sqrt{3}}{4}\cdot 6=9\sqrt{3}\cdot 6=54\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.	**1p** **1p**
	b) $(ABC)\cap(A'B'G)=MN$, $M\in AC, N\in BC$ $AB\parallel A'B'\Rightarrow AB\parallel(A'B'G)$, $MN\subset(ABC)\Rightarrow MN\parallel AB$, $CG\cap AB=\{P\}\Rightarrow CP\perp AB\Rightarrow CP\perp MN$, R mijlocul lui $A'B'\Rightarrow RP\perp(ABC), PG\perp MN, MN\subset(ABC)\overset{T3\perp}{\Rightarrow}RG\perp MN$ $tg\sphericalangle((ABC),(A'B'G))=tg\sphericalangle(RGP)=\frac{PR}{PG}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$	**1p** **1p** **1p**

Simulare, Bacalaureat, 11 mai 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numerele reale a și b, știind că $a+ib$ este conjugatul numărului complex $z=\frac{1+i}{1-i}$.

5p **2.** Determinați numărul real pozitiv m pentru care dreapta $x=2$ este axă de simetrie a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-(m^2-1)x+3$.

5p **3.** Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $\sqrt[3]{1+7x}=1+x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile cu trei elemente ale mulțimii $A=\{1,2,3,4,5\}$, elementele submulțimii alese să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$ și $B(4,1)$. Determinați coordonatele punctului M știind că $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $AB=AC=5$ și $BC=6$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\left(A(x)-A(y)\right)^{2023}=O_3$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați inversa matricei $A(x)$, unde $x\in\mathbb{R}$.

2. Se notează cu x_1,x_2,x_3,x_4 rădăcinile polinomului $f=X^4-3X^2+2X+1$.

5p **a)** Determinați restul împărțirii polinomului f la polinomul $g=X-2$.

5p **b)** Arătați că polinomul f nu are rădăcini raționale.

5p **c)** Arătați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=-8$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{1-2x}{e^x}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Arătați că $(2x+1)\sqrt{e}\le 2e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\ge1}$, $I_n=\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx$.

5p **a)** Calculați I_2.

5p **b)** Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\ge1}$ este convergent.

5p **c)** Demonstrați că $(2n+1)I_n=2nI_{n-1}$, pentru orice $n\ge2$.

BAREM

SUBIECTUL I (30 puncte)

1.	$z=i$ $\overline{z}=-i$ $a=0,b=-1$	**2p** **1p** **2p**
2.	$\frac{m^2-1}{4}=2\Rightarrow m^2-9=0$ $m=-3$ nu convine, $m=3$ convine	**3p** **2p**
3.	$1+7x=1+3x+3x^2+x^3$ $x\left(x^2+3x-4\right)=0$ $x_1=0,x_2=1,x_3=-4$	**1p** **1p** **3p**
4.	$p=\frac{nr.cazuri \quad favorabile}{nr.cazuri \quad posibile}$ Submulțimile cu 3 termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice sunt: $\{1,2,3\}$, $\{2,3,4\}$, $\{3,4,5\}$ și $\{1,3,5\}\Rightarrow 4$ cazuri favorabile Numărul submulțimilor cu 3 elemente este $C_5^3=10\Rightarrow p=\frac{2}{5}$	**1p** **2p** **2p**
5.	$\overrightarrow{AB}=3\vec{i}$ și $\overrightarrow{AM}=\left(x_M-1\right)\vec{i}+\left(y_M-1\right)\vec{j}$ $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\begin{cases}x_M=2\\y_M=1\end{cases}$	**2p** **3p**
6.	$S_{ABC}=12$ $R=\frac{abc}{4S}$ $R=\frac{25}{8}$	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. a)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1&x&x^2\\0&1&2x\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&y&y^2\\0&1&2y\\0&0&1\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}1&x+y&(x+y)^2\\0&1&2(x+y)\\0&0&1\end{pmatrix}=A(x+y)$	**2p** **3p**

b)	$A(x)-A(y)=\begin{pmatrix}0 & x-y & x^2-y^2\\ 0 & 0 & 2(x-y)\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left(A(x)-A(y)\right)^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2(x-y)^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$	3p
	$\left(A(x)-A(y)\right)^3=O_3\Rightarrow\left(A(x)-A(y)\right)^{2023}=O_3$	2p
c)	Matricea A este inversabilă	1p
	$\left(A(x)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -x & x^2\\ 0 & 1 & -2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $A(-x)=\begin{pmatrix}1 & -x & x^2\\ 0 & 1 & -2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	3p
	Deci $\left(A(x)\right)^{-1}=A(-x)$, unde $x\in\mathbb{R}$	1p
2. a)	$f(2)=16-12+4+1=9\Rightarrow$	3p
	Restul împărțirii polinomului f la $X-2$ este $f(2)=9$	2p
b)	Presupunem că polinomul f are rădăcini raționale, f are coeficienți întregi, rădăcinile raționale pot fi 1 sau -1.	2p
	$f(1)=1-3+2+1=1\neq 0$ și $f(-1)=1-3-2+1=-3\neq 0$ deci presupunerea este falsă, atunci f nu are rădăcini raționale.	3p
c)	x_1 este rădăcină a lui $f\Rightarrow x_1^4-3x_1^2+2x_1+1=0\,\vert : x_1\neq 0\Rightarrow x_1^3-3x_1+2+\frac{1}{x_1}=0$. Analog $x_2^3-3x_2+2+\frac{1}{x_2}=0, x_3^3-3x_3+2+\frac{1}{x_3}=0, x_4^3-3x_4+2+\frac{1}{x_4}=0$.	3p
	Adunăm relațiile și obținem $\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3\right)+\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right)=3\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right)-8=3\cdot 0-8=-8$.	2p

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. a)	$f'(x)=\frac{(2x+1)'e^x-e^x(2x+1)}{e^{2x}}=$	2p
	$=\frac{(2-2x-1)e^x}{e^{2x}}=\frac{1-2x}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$	3p
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0\Rightarrow$	3p
	$\Rightarrow y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.	2p

c)	$f'(x)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$, $f'(x)>0$ pentru orice $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$, $f'(x)<0$ pentru orice $x\in\left(\frac{1}{2},\infty\right)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $\left(\frac{1}{2},\infty\right)\Rightarrow f(x)\le f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{e^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{\sqrt{e}}\Rightarrow f(x)\le\frac{2}{\sqrt{e}}\Rightarrow\frac{2x+1}{e^x}\le\frac{2}{\sqrt{e}}\Rightarrow(2x+1)\sqrt{e}\le 2e^x$, pentru orice număr real x.	**3p** **2p**
2. a)	$I_2=\int_0^1 1dx-2\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 x^4dx==\left(x-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)\Big\|_0^1=$ $=\frac{8}{15}$	**3p** **2p**
b)	$I_n-I_{n+1}=\int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^n dx\ge 0$ pentru orice n, deci șirul este descrescător $I_n\ge 0$, deci șirul este mărginit inferior Finalizare	**3p** **1p** **1p**
c)	$I_n=x\left(1-x^2\right)^n\Big\|_0^1-n\int_0^1 x\left(1-x^2\right)^{n-1}\cdot(-2x)dx=$ $=-2n\int_0^1\left[\left(1-x^2\right)-1\right]\left(1-x^2\right)^{n-1}dx=$ $=-2nI_n+2nI_{n-1}\Rightarrow(2n+1)I_n=2nI_{n-1},\forall n\ge 2$	**2p** **1p** **2p**

Simulare, Bacalaureat, 11 mai 2023
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 14$ și $a_1 = 2$.

5p **2.** Arătați că $f(1) - f(-1) = 4$ pentru orice număr real m, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x + m$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $7^{x^2+3} = 7^{4x}$.

5p **4.** Prețul unui obiect este 1000 de lei. Determinați prețul obiectului după ce se ieftinește de două ori, succesiv, cu câte 10%.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,0)$, $B(8,3)$ și $C(0,3)$. Calculați aria triunghiului ABC.

5p **6.** Se consideră rombul $ABCD$ cu $AB = 5$ și $BD = 6$. Calculați $\sin(\sphericalangle ADB)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x + y + 5$.

5p **1.** Arătați că $(-1) * 1 = 5$.

5p **2.** Arătați că legea de compoziție „$*$” este asociativă.

5p **3.** Arătați că $e = -5$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **4.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x^2 * x = 7$.

5p **5.** Demonstrați că $(x^2 - y - 5) * (x - y^2) = (x - y)(x + y + 1)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **6.** Determinați numerele naturale m și n pentru care $m * n = 6$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **1**. Arătați că $\det A = -2$.

5p **2**. Demonstrați că inversa matricei A este matricea $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

5p **3**. Arătați că $A \cdot A - 3A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5p **4.** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A - xI_2) = 2$.

5p **5**. Determinați numărul real a, știind că $A \cdot A \cdot A = aA + 6I_2$.

5p **6**. Determinați numerele reale p și q pentru care $A \cdot X = X \cdot A$, unde $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$.

BAREM

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

1.	$a_1+(a_1+r)+(a_1+2r)+(a_1+3r)=14 \Leftrightarrow 4a_1+6r=14$ $r=1$	**3p** **2p**
2.	$f(1)=2+m$ $f(-1)=-2+m \Rightarrow f(1)-f(-1)=2+m-(-2+m)=4$, pentru orice număr real m	**2p** **3p**
3.	$x^2+3=4x \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$ $x=1$ sau $x=3$.	**3p** **2p**
4.	După prima ieftinire cu 10%, prețul obiectului este $1000-10\%\cdot1000=900$ de lei După a doua ieftinire cu 10%, prețul obiectului este $900-10\%\cdot900=810$ de lei	**3p** **2p**
5.	$A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert$, unde $\Delta=\begin{vmatrix}4&0&1\\8&3&1\\0&3&1\end{vmatrix}=24$ $A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot24=12$	**3p** **2p**
6.	$m(\sphericalangle AOD)=90^\circ$, unde $\{O\}=AC\cap BD$ și $DO=3\Rightarrow AO=4$ $\sin(\sphericalangle ADB)=\frac{AO}{AD}=\frac{4}{5}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

1.	$(-1)*1=(-1)+1+5=$ $=0+5=5$	**3p** **2p**
2.	$(x*y)*z=(x+y+5)*z=(x+y+5)+z+5=x+y+z+10$ $x*(y*z)=x*(y+z+5)=x+(y+z+5)+5=x+y+z+10=(x*y)*z$ pentru orice numere reale x,y și z, deci legea de compoziție „$*$” este asociativă	**2p** **3p**
3.	$x*(-5)=x+(-5)+5=x$ $(-5)*x=(-5)+x+5=x=x*(-5)$, pentru orice număr real x, deci $e=-5$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.	**2p** **3p**
4.	$x^2+x+5=7 \Leftrightarrow x^2+x-2=0$, $x=-2$ sau $x=1$	**3p** **2p**
5.	$(x^2-y-5)*(x-y^2)=x^2-y-5+x-y^2+5=$ $=x^2-y^2+x-y=(x-y)(x+y)+(x-y)=(x-y)(x+y+1)$, pentru orice numere reale x,y	**2p** **3p**
6.	$m*n=6 \Leftrightarrow m+n+5=6 \Leftrightarrow m+n=1$ Cum m și n sunt numere naturale , obținem $m=0,n=1$ sau $m=1,n=0$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

1.	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-2\cdot 2=$ $=2-4=-2$	**3p** **2p**
2.	$A\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-1)+2\cdot 1 & 1\cdot 1+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\ 2\cdot(-1)+2\cdot 1 & 2\cdot 1+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$ $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot A=\begin{pmatrix}(-1)\cdot 1+1\cdot 2 & (-1)\cdot 2+1\cdot 2\\ 1\cdot 1+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2 & 1\cdot 2+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$, deci matricea $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ este inversa matricei A.	**2p** **3p**
3.	$A\cdot A=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 6 & 8\end{pmatrix}$, $3A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 6 & 6\end{pmatrix}$ $A\cdot A-3A=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 6 & 8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 6\\ 6 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$	**3p** **2p**
4.	$A-xI_2=\begin{pmatrix}1-x & 2\\ 2 & 2-x\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A-xI_2\right)=\begin{vmatrix}1-x & 2\\ 2 & 2-x\end{vmatrix}=x^2-3x-2$ $x^2-3x-2=2\Leftrightarrow x^2-3x-4=0\Leftrightarrow x=-1$ sau $x=4$	**3p** **2p**
5.	$A\cdot A=3A+2I_2\Rightarrow(A\cdot A)\cdot A=(3A+2I_2)\cdot A=3A\cdot A+2A=3(3A+2I_2)+2A=11A+6I_2$ Cum matricea A este nenulă, $11A+6I_2=aA+6I_2\Leftrightarrow a=11$	**3p** **2p**
6.	$A\cdot X=\begin{pmatrix}2+2p & 1+2q\\ 4+2p & 2+2q\end{pmatrix}$, $X\cdot A=\begin{pmatrix}4 & 6\\ p+2q & 2p+2q\end{pmatrix}$ Cum $\begin{pmatrix}2+2p & 1+2q\\ 4+2p & 2+2q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6\\ p+2q & 2p+2q\end{pmatrix}$, obținem $p=1$ și $q=\frac{5}{2}$.	**2p** **3p**

Simulare, Bacalaureat, 11 mai 2023
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați a_{2023}, știind că $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică cu $a_1 = 2023$ și $r = -1$.

5p **2.** Arătați că $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 23$, știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 3x + 10 = 0$.

5p **3.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = 2^{x+1} - 1$ cu axele Ox și respectiv Oy.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile cu 2 elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, ..., 9\}$, aceasta să fie formată doar din numere prime.

5p **5.** Calculați $\vec{a}\cdot\vec{b}$, știind că $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ și unghiul vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ are măsura $\frac{\pi}{3}$.

5p **6.** Arătați că $2\sqrt{2}\operatorname{tg} x + 1 = 0$, știind că $\sin x = \frac{1}{3}$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(A(2))$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(-x) = I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Arătați că $\det(A(1) + A(2) + ... + A(n)) = \frac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$, pentru orice număr natural nenul n.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + (m-3)X^2 - 17X + (2m+7)$, cu $m \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul f este divizibil cu $X - 1$.

5p **b)** Pentru $m = 4$ arătați că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -62$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $27^x + 9^x - 17\cdot 3^x + 15 = 0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}-x-2$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}-1,\ x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că imaginea funcției f este intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\dfrac{1}{x+1}$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1\left(f(x)-\dfrac{1}{x+1}\right)dx$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 xf(x)dx=\dfrac{4}{3}-\ln 2$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $\dfrac{1}{2}+\ln\left(n^2+n\right)$.

BAREM

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_{2023}=2023+2022\cdot(-1)=$ $=1$	**3p** **2p**
2.	$x_1+x_2=3, x_1x_2=10$ $x_1+x_2+2x_1x_2=3+2\cdot 10=23$	**3p** **2p**
3.	$G_f\cap Ox: f(x)=0 \Rightarrow x=-1$ $A(-1,0)$ $G_f\cap Oy: f(0)=1$ $B(0,1)$	**2p** **1p** **1p** **1p**
4.	Sunt 4 numere prime în mulțime, deci sunt $C_4^2=6$ cazuri favorabile Sunt $C_9^2=36$ de cazuri posibile $p=\frac{nr.cazuri\quad favorabile}{nr.cazuri\quad posibile}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$	**2p** **1p** **2p**
5.	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cdot\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$	**3p** **2p**
6.	$\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cos^2 x=1, x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\Rightarrow \cos x=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $tgx=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\Rightarrow 2\sqrt{2}tgx+1=0$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det(A(2))=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-1\cdot 1=$ $=3$	**3p** **2p**
b)	$A(x)\cdot A(-x)=\begin{pmatrix}x & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-x & 1\\ 1 & -x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x^2+1 & 0\\ 0 & -x^2+1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-x^2+1 & 0\\ 0 & -x^2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=0$	**3p** **2p**

c)	$A(1)+A(2)+\ldots+A(n)=\begin{pmatrix}1+2+\ldots+n & n\\ n & 1+2+\ldots+n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{n(n+1)}{2} & n\\ n & \frac{n(n+1)}{2}\end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix}\frac{n(n+1)}{2} & n\\ n & \frac{n(n+1)}{2}\end{vmatrix}=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n\cdot n=\frac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$, pentru orice număr natural nenul n	**2p** **3p**
2. a)	$f \vdots (X-1) \Leftrightarrow f(1)=0$ $f(1)=1+m-3-17+2m+7=3m-12$ $3m-12=0 \Rightarrow m=4$	**2p** **1p** **2p**
b)	x_1 rădăcină a lui $f \Rightarrow x_1^3+x_1^2-17x_1+15=0 \Rightarrow x_1^3+x_1^2=17x_1-15$ Analog $x_2^3+x_2^2=17x_2-15$, $x_3^3+x_3^2=17x_3-15$, Adunăm relațiile și obținem $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_1^2+x_2^2+x_3^2=17\cdot(x_1+x_2+x_3)-15\cdot 3=17\cdot(-1)-15\cdot 3=-62$	**3p** **2p**
c)	Cu notația $3^x=y>0 \Rightarrow y^3+y^2-17y+15=0 \Rightarrow (y-1)(y-3)(y+5)=0$ $y=-5<0$ $y=1 \Rightarrow x=0$ $y=3 \Rightarrow x=1$	**2p** **1p** **1p** **1p**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+5}}-1=$ $=\frac{2(x+2)}{2\sqrt{x^2+4x+5}}-1=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}-1,\ x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-x-2\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+4x+5-x^2-4x-4}{\sqrt{x^2+4x+5}+x+2}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}+x+2}=0$, deci dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției.	**2p** **3p**
c)	$f'(x)=0 \Rightarrow x+2=\sqrt{x^2+4x+5} \Rightarrow x^2+4x+4=x^2+4x+5$, fals, deci $f'(x)\neq 0$, pentru orice număr real x f' are proprietatea lui Darboux, deci f' are semn constant, $f'(0)=\frac{2}{\sqrt{5}}-1<0$, obținem că $f'<0$, pentru orice număr real x, deci f este descrescătoare $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ și f este continuă $\Rightarrow \operatorname{Im} f=(0,+\infty)$	**2p** **3p**

2. **a)**	$\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+1} \right) dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \int_0^1 x dx =$ $= \frac{x^2}{2} \Big\|_0^1 = \frac{1}{2}$	**3p** **2p**
b)	$\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{x+1} \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 + 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx =$ $= \left(\frac{x^3}{3} + x - \ln(x+1) \right) \Big\|_0^1 = \frac{4}{3} - \ln 2$	**2p** **3p**
c)	$A = \int_0^1 \|f(x)\| dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \ln(x+1) \right) \Big\|_0^1 = \frac{1}{2} + \ln 2$ $\frac{1}{2} + \ln 2 = \frac{1}{2} + \ln(n^2 + n) \Rightarrow n = -2$ nu convine și $n = 1$	**3p** **2p**

Simulare, Bacalaureat, 11 mai 2023

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1. Calculați media aritmetică a numerelor $a=2\left(5-\sqrt{5}\right)$ și $b=2\sqrt{5}$.

5p **2.** Determinați numărul real m pentru care vârful parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+3mx+1$ are abscisa egală cu $\frac{3}{2}$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+3^{x+2}=10$.

5p **4.** După o scumpire cu 25%, prețul unui obiect este 250 de lei. Calculați prețul obiectului înainte de scumpire.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$, $B(-3,2)$ și $C(5,2)$. Determinați
5p lungimea medianei din vârful A al triunghiului ABC.

5p **6.** Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, arătați că $\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=1$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot A+I_2=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **c)** Demonstrați că $\det\left(A-aI_2\right)\geq 1$, pentru orice număr real a.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2+2X$.

5p **a)** Calculați $f(1)$.

5p **b)** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la $X-2$.

5p **c)** Calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1+\ln x$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$.

5p **b)** Arătați că funcția f este crescătoare pe $\left[\frac{1}{e},\infty\right)$.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\geq -\frac{1}{e}$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3 xf(x)dx=\frac{32}{3}$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)e^x dx=e^2$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>1$, pentru care aria suprafeței plane delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=a$, este egală cu $4+\ln a$.

BAREM

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$m_a=\frac{10-2\sqrt{5}+2\sqrt{5}}{2}=$ $=\frac{10}{2}=5$	**3p** **2p**
2.	$-\frac{b}{2a}=\frac{3m}{2}$ $\frac{3m}{2}=\frac{3}{2}$ $m=1$	**2p** **2p** **1p**
3.	$3^x\left(1+3^2\right)=10\Leftrightarrow 3^x=1$ $x=0$	**3p** **2p**
4.	$p+\frac{25}{100}\cdot p=250,$ unde p este prețul obiectului înainte de scumpire $p=200$ lei	**2p** **3p**
5.	$x_M=1, y_M=2,$ unde punctul M este mijlocul laturii BC $AM=2$	**2p** **3p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=\frac{1}{2}$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=\left(\sin x-\cos x\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=0$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3&-2\\5&-3\end{vmatrix}=3\cdot(-3)-(-2)\cdot5=$ $=-9+10=1$	**3p** **2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ $A\cdot A+I_2=\begin{pmatrix}-1+1&0\\0&-1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O_2$	**3p** **2p**
c)	$A-aI_2=\begin{pmatrix}3-a&-2\\5&-3-a\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A-aI_2\right)=\begin{vmatrix}3-a&-2\\5&-3-a\end{vmatrix}=-9+a^2+10=$ $=a^2+1\geq1$, pentru orice număr real a	**3p** **2p**
2.a)	$f(1)=1^3-3\cdot1^2+2\cdot1=$ $=1-3+2=0$	**2p** **3p**
b)	Câtul este X^2-X Restul este 0	**2p** **3p**

c)	$x_1+x_2+x_3=3,\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=2$ $x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}=3^2-2\cdot 2=5$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x)=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$ Finalizare	**3p** **2p**
b)	$f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{1}{e}$ $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{e},+\infty\right)\Rightarrow f$ crescătoare pe intervalul $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$	**2p** **3p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right]\Rightarrow f$ descrescătoare pe intervalul $\left(0,\frac{1}{e}\right]$ Din tabelul de variație obținem $f(x)\ge f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_1^3 xf(x)dx=\int_1^3 x\frac{x^2+1}{x}dx=\int_1^3\left(x^2+1\right)dx=$ $=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big\|_1^3=\frac{32}{3}$	**2p** **3p**
b)	$\int_1^2 xe^x dx=xe^x\Big\|_1^2-\int_1^2 e^x dx=$ $=2e^2-e-e^x\Big\|_1^2=e^2$	**3p** **2p**
c)	$Aria=\int_1^a\left\|f(x)\right\|dx=\int_1^a\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\ln x\right)\Big\|_1^a=\frac{a^2-1}{2}+\ln a$ Din $Aria=4+\ln a\Rightarrow\frac{a^2-1}{2}=4\Rightarrow a^2=9\Rightarrow a=\pm 3$, deoarece $a>1\Rightarrow a=3$	**3p** **2p**

MODEL SIMULARE BAC M1 – CERC PEDAGOGIC DECEMBRIE 2023

de Profesor Adela Dimov, Colegiul Național “Nicolae Bălcescu”Brăila

EXAMENUL DE BACALAUREAT 2024

Proba E-c)

Simulare Proba scrisă la matematică – decembrie 2023

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 180 minute.**
- **La toate subiectele se cer rezolvările complete.**

SUBIECTUL I (30 puncte)

1. Să se arate că numărul $\log_9 \sqrt{3} + \log_4 \sqrt[3]{2}$ este rațional.

2. Se consideră $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = mx^2 - 2mx + m - 1,\ m \in \mathbb{R}^*$. Determinați $m \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $f(x) < 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2^x + 2^{x+1} + 2^{x-1} = 56$.

4. Fie $A = \{1, 2, ...1000\}$. Determinați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea $\left\{\sqrt[3]{n} \mid n \in A\right\}$, acesta să fie rațional.

5. Fie $\triangle ABC$ și $M \in (BC)$ astfel încât $\overrightarrow{MC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$.

6. Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $tgx = 3$, calculați $\sin 2x$.

SUBIECTUL II (30 puncte)

1. Fie sistemul $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2mx + my + z = 1 \\ x + my + mz = 1 \end{cases}$, cu $m \in \mathbb{R}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2m & m & 1 \\ 1 & m & m \end{pmatrix}$.

a) Calculați determinantul lui A.

b) Să se rezolve sistemul în cazul $m = 1$.

c) Să se determine valorile întregi ale lui $m \neq 1$, pentru care sistemul are o soluție cu componente întregi.

2. Pe mulțimea $M = (-4, \infty)$ se consideră legea de compoziție $x \circ y = 3xy + 12x + 12y + 44$.

a) Arătați că $x \circ y = 3(x+4)(y+4) - 4$.

b) Demonstrați că legea "$\circ$" admite element neutru.

c) Rezolvați în M ecuația $x \circ x \circ x = 5$.

SUBIECTUL III (30 puncte)

1. Se consideră funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln(\ln x)$.

a) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă $x=e$.

b) Determinați asimptotele la graficul funcției f.

c) Arătați că f este concavă pe $(1,\infty)$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{(x+1)(x^2+1)}, x\geq 1\\(x-1)e^x, x<1\end{cases}$.

a) Arătaţi că funcţia admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Calculaţi o primitivă a sa.

c) Determinaţi primitiva funcţiei f, al cărei grafic conţine punctul $A(1,0)$.

SUMAR:

ARTICOLE MATEMATICE

OLIMPIADE şi CONCURSURI

PROBLEME REZOLVATE şi PROPUSE

REVISTA DE MATEMATICĂ DIN BRĂILA “TRIDENT” este editată semestrial cu sprijinul S.S.M.R. Filiala Brăila și se adresează tuturor elevilor şi profesorilor interesaţi de concursuri, olimpiade şi rezultate deosebite la matematică. Materialele spre publicare, precum şi soluţiile problemelor, se vor trimite la adresa bcviorel2009@yahoo.com sau pe adresa revistei: str. Alexandru I. Cuza, nr.182, Brăila, tel. / fax 0239 615333, 0722697363, conform cerințelor de la Gazeta Matematică. Propunătorii de articole şi probleme, îşi asumă responsabilitatea pentru originalitatea materialelor.

TEHNOREDACTARE: REDACŢIA REVISTEI

TIPARUL: S.C. OFFSET GRAFIC SERV S.R.L. BRĂILA