CONCURSUL INTERJUDEȚEAN “ MICII BĂLCEŞTI” - 18.01.2025

Clasa a IV a

1. Determinaţi numerele naturale *a* şi *b* care verifică egalitatea:

$$\left[3+\left(7\times a\times b+31\times 8-603:3\right):9\right]\times 2+1993=2025$$

***Soluţie*:**

$\left[3+\left(7\times a\times b+31\times 8-603:3\right):9\right]\times 2=32,\left(3p\right)$

$3+\left(7\times a\times b+31\times 8-603:3\right):9=16,\left(3p\right)$

$\left(7\times a\times b+248-201\right):9=13,\left(3p\right)$

$\left(7\times a\times b+47\right):9=13,\left(3p\right)$

$7\times a\times b+47=117,\left(3p\right)$

$7\times a\times b=70,\left(3p\right)$

$a\times b=10,\left(4p\right)$

Soluţiile sunt : $i)\begin{cases}a=1\\b=10\end{cases},\left(2p\right);ii)\begin{cases}a=2\\b=5\end{cases},\left(2p\right);iii)\begin{cases}a=5\\b=2\end{cases},\left(2p\right);iv)\begin{cases}a=10\\b=1\end{cases},\left(2p\right)$.

2. În pătratul alăturat, suma numerelor de pe fiecare linie, de pe fiecare coloană și de pe fiecare dintre cele două diagonale este aceeași. Determinați numerele *a, b, c, d* și *e*. Justificați răspunsul.

Soluție:

a	*b*	90
100	*c*	*d*
50	*e*	80

$$a+100+50=a+c+80\Rightarrow 150=c+80\Rightarrow c=70\left(6p\right)$$

$$a+100+50=a+b+90\Rightarrow 150=b+90\Rightarrow b=60\left(6p\right)$$

$$a+c+80=90+c+50\Rightarrow a=140-80\Rightarrow a=60\left(6p\right)$$

$$90+d+80=50+c+90\Rightarrow d+170=50+70+90=210\Rightarrow d=40\left(6p\right)$$

$$50+e+80=a+100+50\Rightarrow e+130=60+100+50=210\Rightarrow e=80\left(6p\right)$$

3. Într-o sală sunt 43 de elevi. Dacă ar pleca din sală 3 fete și ar mai veni 2 băieți, atunci numărul băieților este trei pătrimi din numărul fetelor. Aflați numărul fetelor.

Soluție:

$43-3+2=42(10p)$

$B+2$

Notăm F numărul fetelor și B numărul băieților.

$F-3$

42 $(10p)$

$42:7=6(5p)$

$F=6\cdot 4+3=27 \Rightarrow$ numãrul fetelor este $27(5p)$.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN “ MICII BĂLCEȘTI” - 18.01.2025

Clasa a V a

1. Se dau cinci numere naturale a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 cu proprietatea că suma oricăror două dintre ele se divide cu 5. Arătați că fiecare dintre cele cinci numere se divide cu 5.

***

Soluție:

$$\left.\begin{array}{l} a_1+a_2 \vdots 5 \\ a_3+a_4 \vdots 5 \\ a_5+a_1 \vdots 5 \\ a_2+a_3 \vdots 5 \\ a_4+a_5 \vdots 5 \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} 2(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5) \vdots 5 (10p) \Rightarrow (a_1+a_2+a_3+a_4+a_5) \vdots 5,\ (1)$$

$\left.\begin{array}{l} a_2+a_3 \vdots 5 \\ a_4+a_5 \vdots 5 \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} (a_2+a_3+a_4+a_5) \vdots 5, (10p)(2)$. Din relațiile (1) și $(2) \Rightarrow$ $a_1 \vdots 5$. Analog, $a_2 \vdots 5, a_3 \vdots 5, a_4 \vdots 5$ și $a_5 \vdots 5 (10p)$.

2. Suma dintre un număr natural care se împarte exact la 9 și răsturnatul său dă un număr cu 2026 cifre egale. Aflați valoarea acestei sume.

Gazeta Matematică

***Soluție*:**

Dacă un număr se împarte exact la 9, atunci și răsturnatul său se împarte exact la $9 (10p)$, deci suma dintre număr și răsturnatul său se împarte exact la $9 (5p)$. Conform ipotezei, suma acestor numere are forma $\underbrace{\overline{aa...a}}_{2026\ ori}$ și se împarte exact la 9, rezultă $\underbrace{\overline{aa...a}}_{2026\ ori} = a \cdot \underbrace{11...1}_{2026\ ori}$ se împarte exact la $9 (10p)$. Dar $\underbrace{11...1}_{2026 ori}$ este prim cu 3, rezultă a se împarte exact la 9 și este cifră nenulă $\Rightarrow a = 9$. Deci suma numerelor este $\underbrace{99...9}_{2026\ ori} (5p)$.

3. Se dau numerele $S_1 = 5^2 + 10^2 + 15^2 + 20^2 + 25^2 + 30^2 + 35^2 + 40^2 + 45^2$, $S_2 = 9^2 + 18^2 + 27^2 + 36^2 + 45^2$, $a = 3^{21} \cdot S_1$ și $b = 2^{32} \cdot S_2$.

a) Să se calculeze sumele S_1 și S_2.

b) Să se compare numerele a și b.

Gabriel Daniilescu, Brăila

***Soluție*:**

a) $S_1 = 5^2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2) = 25 \cdot (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81) =$

$= 25 \cdot 285 = 7125 (5p)$

$$S_2 = 9^2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) = 81 \cdot 55 = 4455 (5p)$$

b) $a = 3^{21} \cdot S_1 = 3^{20} \cdot 3 \cdot S_1 = 3^{20} \cdot 3 \cdot 7125 = (3^2)^{10} \cdot 21375 = 9^{10} \cdot 21375 (10p)$.

$b = 2^{32} \cdot S_2 = 2^{30} \cdot 2^2 \cdot 4455 = (2^3)^{10} 2^2 \cdot 4455 = 8^{10} \cdot 17820 (10p)$. Deci, $a > b$.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN “ MICII BĂLCEȘTI” - 18.01.2025

Clasa a VI a

1. În jurul punctului O se consideră unghiurile $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD, \sphericalangle DOE$ și $\sphericalangle EOA$ cu măsurile direct proporționale cu numerele prime $p, p+1, p+3, p+5, p+11$.

a) Calculați măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD, \sphericalangle DOE$ și $\sphericalangle EOA$.

b) Calculați măsura unghiului determinat de bisectoarea $(OM$ a unghiului $\sphericalangle AOB$ cu bisectoarea $(OP$ a unghiului $\sphericalangle DOE$.

Carmen și Viorel Botea, Brăila

Soluție:

a) Dacă $p, p+1$ sunt numere consecutive prime, rezultă că $p=2$, iar numerele prime devin 2, 3, 5, 7, 13$(5p)$.
Din condiția de directă proporționalitate avem relația:

$$\frac{AOB}{2}=\frac{BOC}{3}=\frac{COD}{5}=\frac{DOE}{7}=\frac{EOA}{13}=\frac{360^\circ}{30}=12^\circ$$

din care rezultă că $AOB=24^\circ, BOC=36^\circ, COD=60^\circ, DOE=84^\circ$ și $EOA=156^\circ\ (15p)$.

b) $MOP=\dfrac{AOB}{2}+BOC+COD+\dfrac{DOE}{2}=12^\circ+36^\circ+60^\circ+42^\circ=150^\circ\ (10p)$.

2. Arătați că:

a) $N=\overline{ab1}-\overline{1ab}$ nu poate fi număr prim.

b) Determinați cifrele a și b pentru care N este cubul unui număr natural.

Gazeta Matematică

Soluție:

a) $N=\overline{ab}\cdot 10+1-100-\overline{ab}=9\cdot\overline{ab}-99=9\cdot\left(\overline{ab}-11\right)\vdots 9 \Rightarrow N$ nu este prim. $(10p)$

b) Dacă $N=9\cdot\left(\overline{ab}-11\right)$ trebuie să fie cub perfect, rezultă că $\overline{ab}-11=3\cdot x^3\ (10p)$, unde $x^3\in\{0;1;8;27\}$, din care rezultă că $\overline{ab}\in\{11;14;35;92\}\ (10p)$.

3. Se consideră numerele $a=1+13+13^2+13^3+13^4++...+13^{2024}$ și $b=1+13+13^2+13^3+13^4+...+13^{2026}$.

a) Să se demonstreze că a este divizibil cu 61.

b) Să se determine restul împărțirii lui b la 61.

Gabriel Daniilescu, Brăila

Soluție:

a) $a=1+13+13^2+13^3+13^4+13^5+...+13^{2022}+13^{2023}+13^{2024}=\left(1+13+13^2\right)+13^3\cdot\left(1+13+13^2\right)+13^6\cdot\left(1+13+13^2\right)$
$+...+13^{2022}\cdot\left(1+13+13^2\right)(5p)=183\cdot\left(1+13^3+13^6+...+13^{2022}\right)=61\cdot 3\cdot\left(1+13^3+13^6+...+13^{2022}\right)\vdots 61(10p)$

b) $b=1+13+13^2\cdot\left(1+13+13^2+13^3+...+13^{2024}\right)=1+13+13^2\cdot a(10p)=14+169\cdot 61\cdot 3\cdot\left(1+13^3+13^6+...+13^{2022}\right)(5p)$

Restul împărțirii lui b la 61este 14.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN “ MICII BĂLCEŞTI” - 18.01.2025

Clasa a VII a

1. Aflați numerele prime p, q și r care verifică proprietățile:

$$p-r=2, r-q=2 \text{ și } 2^p=2^q+1\cdot 2\cdot 3 \ldots \cdot r.$$

George-Florin Şerban, Brăila

Soluţie:

$$p-r=2, r-q=2, \text{ le adunăm și obținem } p-q=4 \Rightarrow q=p-4 \text{ și } r=p-2, (5p)$$

$$2^p=2^{p-4}+1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot(p-2) \Leftrightarrow 2^p-2^{p-4}=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot(p-2) \Leftrightarrow 2^{p-4}\left(2^4-1\right)=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot(p-2)(5p)$$

$$2^{p-4}\cdot 15=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot(p-2) \Rightarrow 2^{p-4}\cdot 3\cdot 5=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot(p-2) \Rightarrow p-2 \leq 6 \Rightarrow p \leq 8(10p).$$

$p-4 \leq 4$ și $p-4$ este prim rezultă $q=3, r=5$ și $p=7(5p)$.

$$2^3\cdot 3\cdot 5=5!,\ 120=120, \text{ adevărat. În concluzie } p=7, r=5, q=3.(5p)$$

2. Fie triunghiul dreptunghic isoscel ΔABC cu $\sphericalangle A=90^{\circ}$. Se consideră D mijlocul laturii AB și $E \in BC$ astfel încât $BE=3CE$. În exteriorul triunghiului ΔABC construim triunghiul dreptunghic isoscel ΔAFC cu $\sphericalangle F=90^{\circ}$. Determinați măsura unghiului $\sphericalangle DFE$.

Gazeta Matematică

Soluție:

Cosiderăm punctul G pe segmentul BC astfel încât $CG=3BG(5p)$. Atunci $\Delta DGE=\Delta ECF(LUL)(10p)$. Rezultă $DE=EF$ și $\sphericalangle DEG=\sphericalangle EFC$. Cum $\sphericalangle FEC+\sphericalangle EFC=90^{\circ}(10p)$, reiese că $\sphericalangle DEG+\sphericalangle FEC=90^{\circ}$, deci $\sphericalangle DEF=90^{\circ}$. Obținem că ΔDEF este dreptunghic isoscel. Atunci $\sphericalangle DFE=45^{\circ}(5p)$.

3. Considerăm numerele prime p și q și n un număr natural, $n \geq 2$.

a) Aflați numerele prime p și q dacă $p^2q\left(p^2q+2\right)=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 7$.

b) Demonstrați că pentru $n \geq 8$, relația $p^2q\left(p^2q+2\right)=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n(n+2)$ nu poate avea loc.

Carmen și Viorel Botea, Brăila

Soluție:

a) $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 7=28\cdot 30 \Rightarrow p^2q=28=4\cdot 7 \Rightarrow p=2, q=7.(10p)$

b) $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n(n+2) \vdots (2\cdot 4\cdot 6\cdot 8) \Rightarrow p^2q\left(p^2q+2\right) \vdots 128(10p) \Rightarrow p=2, q=2 \Rightarrow 4\cdot 2(4\cdot 2+2) \vdots 128 \Rightarrow$

$80 \vdots 128,(10p)$ fals. Deci relația nu poate avea loc.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN “ MICII BĂLCEŞTI” - 18.01.2025

Clasa a VIII a

1. Aflaţi numerele reale a,b care verifică simultan condiţiile: $a^2+2023ab+b^2\ge 2025$ şi $a^4+b^4\le 2$.

George-Florin Şerban, Brăila

Soluţie:

$$\left(a-b\right)^2\ge 0 \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab\ge 0 \Leftrightarrow a^2+b^2\ge 2ab \Rightarrow ab\le \frac{a^2+b^2}{2}\left(5p\right)$$

$$2025\le a^2+2023ab+b^2\le a^2+b^2+\frac{2023(a^2+b^2)}{2}=\frac{2025(a^2+b^2)}{2}\left(5p\right)\Leftrightarrow a^2+b^2\ge 2.\left(5p\right)$$

Din inegalitatea lui C.B.S. rezultă $a^4+b^4\ge \frac{(a^2+b^2)^2}{2}\ge \frac{4}{2}=2\left(5p\right)$, dar $a^4+b^4\le 2$, deci

$a^4+b^4=2\left(5p\right)$, egalitate avem pentru $a=b,\ a^4=1,\ a\in\left\{-1,1\right\}$.În concluzie $S=\left\{\left(1,1\right),\left(-1,-1\right)\right\}.\left(5p\right)$

2. Dacă p și $p+2$ sunt numere prime, $p>3$ și $x\in\mathbb{N}^*$, demonstrați că $\left(p\cdot x\right)^2+\left(p\cdot x+2\cdot x\right)^2$ se poate scrie ca suma pătratelor a trei numere întregi nenule.

***

Soluție:

Deoarece p și $p+2$ sunt numere prime și $p>3$, avem $p=6k-1$ și $p+2=6k+1,\ k\in\mathbb{N}^*\left(10p\right)$.

$p^2+\left(p+2\right)^2=\left(6k-1\right)^2+\left(6k+1\right)^2=36k^2-12k+1+36k^2+12k+1=72k^2+2=64k^2+8k^2+2=$

$=64k^2+\left(4k^2+4k+1\right)+\left(4k^2-4k+1\right)=64k^2+\left(2k+1\right)^2+\left(2k-1\right)^2\left(10p\right)$, care este suma pătratelor trei numere întregi nenule, de unde rezultă că $\left(px\right)^2+\left(px+2x\right)^2=\left(8kx\right)^2+\left(2kx+x\right)^2+\left(2kx-x\right)^2.\left(10p\right)$

3. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ și punctele $M\in\left(A'D'\right),\ N\in\left(AB\right),\ P\in\left(CC'\right)$ cu $D'M=AN=CP$.

a) Demonstrați că triunghiul MNP este echilateral.

b) Dacă $B'D\cap C'A=\left\{O\right\}$, determinați pozițiile punctelor M,N,P pe segmentele $\left(A'D'\right),\left(AB\right)$, respectiv $\left(CC'\right)$, astfel încât $O\in\left(MNP\right)$.

Adela Dimov, Brăila

Soluție:

a) Notăm $AB=a,\ D'M=x$, unde $x\in\left(0,a\right)$.

$\triangle MA'A$ dreptunghic în A', rezultă $AM=\sqrt{a^2+\left(a-x\right)^2}$.

$AB\perp\left(ADD'A'\right),\ AM\subset\left(ADD'A'\right)$, rezultă $AB\perp AM$.

Teorema lui Pitagora în $\triangle MAN$, implică $MN=\sqrt{a^2+\left(a-x\right)^2+x^2}$.

Analog $NP=PM=\sqrt{a^2+\left(a-x\right)^2+x^2}$, rezultă triunghiul MNP echilateral. $\left(10p\right)$

b) Fie Q centrul cercului circumscris triunghiului MNP.

$B'M=B'N=B'P=\sqrt{a^2+\left(a-x\right)^2}$, ceea ce înseamnă că piramida $B'MNP$ este triunghiulară regulată și $B'Q\perp\left(MNP\right)\left(5p\right)$.

Analog, piramida $DMNP$ este triunghiulară regulată și rezultă $DQ \perp (MNP)(5p)$.
Aceasta înseamnă că punctele D, Q, B' sunt coliniare și $DB' \cap (MNP) = \{Q\}$.
Dacă $O \in (MNP)$, rezultă $\{Q\} = \{O\}$.

$\triangle B'OP$ este dreptunghic în O și $B'O = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $B'P = \sqrt{a^2 + (a-x)^2}$, $PO = \frac{\sqrt{a^2 + (a-x)^2 + x^2}}{3} \cdot \sqrt{3}(5p)$.
Aplicînd teorema lui Pitagora, obținem ecuația $7a^2 - 16ax + 4x^2 = 0$. Atunci $(a-2x)(7a-2x) = 0$.
Avem variantele $x = \frac{a}{2}$ sau $x = \frac{7a}{2}$. Soluția corectă este $x = \frac{a}{2}$, deoarece $\frac{7a}{2} > a$.
Deci punctele M, N, P sunt mijloacele segmentelor $(A'D'), (AB)$, respectiv $(CC')(5p)$.